

Aufgabe 44: Morse-Potenzial (2 Punkte)

Das Potenzial zwischen den beiden H-Atomen im Wasserstoffmolekül kann beschrieben werden durch das Morse-Potenzial

$$V(r) = V_0 \left(1 - e^{-(r-r_0)/a}\right)^2 \text{ mit } r_0 = 0,74 \cdot 10^{-10} \text{ m}, V_0 = 4,72 \text{ eV}.$$

Approximieren Sie das Potenzial für kleine Schwingungen um die Ruhelage durch ein harmonisches Oszillator-Potenzial und bestimmen Sie a/r_0 mit Hilfe der experimentell bekannten Differenz der beiden niedrigsten Schwingungs-Eigenzustände (d.h. Drehimpulsquantenzahl $l = 0$) $\Delta E = 0,52 \text{ eV}$.

Aufgabe 45: Spin in beliebigen Richtungen (4 Punkte)

Es sei \vec{n} ein Vektor der Länge $|\vec{n}| = 1$. Die Komponente des Spins in Richtung \vec{n} ist definiert durch $S = \vec{n} \cdot \vec{S}$.

- schreiben Sie \vec{n} in Polarkoordinaten und berechnen Sie den Erwartungswert von S im Zustand $|+\rangle$.
- Schreiben Sie S unter Verwendung der Polarkoordinaten von \vec{n} explizit als 2×2 -Matrix auf und zeigen Sie $S^2 = \frac{\hbar^2}{4} \mathbf{1}$.
- Welche Eigenwerte besitzt S ? Finden Sie die zugehörigen Eigenzustände $\xi^{(+)}$ und $\xi^{(-)}$.

Aufgabe 46: Wasserstoff-Zustände mit maximalem Drehimpuls (5 Punkte)

- Benutzen Sie die Rekursionsgleichung für die Koeffizienten a_k der zugeordneten Laguerre-Polynome um zu zeigen, dass im Fall $l = n - 1$ die Radialfunktion die Form annimmt

$$f_{n,n-1} = N_n r^{n-1} e^{-r/na},$$

und bestimmen Sie die Normierungskonstante N_n durch direkte Integration.

- Berechnen Sie $\langle r \rangle$ und $\langle r^2 \rangle$ für Zustände mit $l = n - 1$.
- Berechnen Sie $\Delta r / \langle r \rangle$ für solche Zustände. Vergleichen Sie das Ergebnis für große n mit dem Bohr'schen Atommodell und kommentieren Sie den Vergleich.

Aufgabe 47: Hyperfeinstrukturaufspaltung III (4 Punkte)

Im vorherigen Übungsblatt wurden die Feinstruktur- und Hyperfeinstrukturaufspaltungen des Balmer- α Übergangs $2s^2S_{1/2} \rightarrow 3p^2P_{3/2}$ berechnet. Es wurden spektrale Aufspaltungen von $\Delta\nu = 4,5 \text{ GHz}$ (Feinstruktur) und $\Delta\nu = 193 \text{ MHz}$ (Hyperfeinstruktur) gefunden.

- Wenn Sie nur die Feinstrukturkomponenten spektral auflösen wollen, wie viele Linien eines Gitters müssen beleuchtet sein, damit diese spektrale Auflösung erreicht werden kann? Wenn Sie ein typisches Gitter mit einer Strichzahl von 1200 (1800) Linien/mm einsetzen, in welcher Gitterordnung müssen Sie mindestens arbeiten? Welche Brennweite muss der Fokussierspiegel mindestens haben, damit ein beugungsbegrenztes Bild des Spaltes ($d = 10 \mu\text{m}$) auf dem Gitter erzeugt wird? Handelsübliche Spektrometer sind typischerweise mit 0,5 m und mit 1 m Brennweite erhältlich. Welchen Einfluss hat das auf die Auswahl des Gitters und die Beugungsordnung, mit der Sie arbeiten können?

- b) Wenn Sie ein Fabry-Perot Interferometer mit einem Plattenabstand von $d = 1\text{ cm}$ und einem Reflexionsvermögen der Spiegel von $R = 98\%$ einsetzen, lässt sich dann auch die Hyperfeinstruktur der Zeeman-Linien auflösen? Wie kann man die Zentralwellenlänge des Fabry-Perot-Interferometers über die Hyperfeinstruktur verstimmen, um ein Spektrum aufzunehmen?

Bitte bringen Sie dieses Blatt zur Besprechung von Aufgabe 43 (von Blatt 10) mit, da die folgenden Abbildungen dazu benötigt werden.

