

Übungen zur Atom- und Quantenphysik (SS 2013)

Prof. Dr. G. Münster, Prof. Dr. H. Zacharias

Übungsblatt 10

Abgabe: 04.07.2013, Besprechung: 09.07.2013

Aufgabe 40: Unschärferelation für den Drehimpuls (7 Punkte)

- Leiten Sie mit Hilfe der Kommutatoren der Drehimpulskomponenten L_j die Unschärferelation für $\Delta L_1 \cdot \Delta L_2$ her.
- Zeigen Sie, dass für die Drehimpuls-Eigenfunktionen $|lm\rangle$ folgende Erwartungswerte gültig sind:

$$\begin{aligned}\langle lm|L_1|lm\rangle &= \langle lm|L_2|lm\rangle = 0, \\ \langle lm|L_1^2|lm\rangle &= \langle lm|L_2^2|lm\rangle = \frac{\hbar^2}{2}(l(l+1) - m^2).\end{aligned}$$

Hinweis: Drücken Sie L_1 und L_2 durch L_+ und L_- aus und beachten Sie die Wirkung von L_+ und L_- auf $|lm\rangle$.

- Berechnen Sie $\Delta L_1 \cdot \Delta L_2$ im Zustand $|lm\rangle$ und zeigen Sie, dass das Ergebnis im Einklang mit der Unschärferelation ist.
- In welchem Zustand $|lm\rangle$ zu festem l besitzen die Unbestimmtheiten der Komponenten L_x , L_y den kleinsten Wert und wie groß ist dieser?
- Gibt es in dem betrachteten Hilbert-Raum Zustände, in denen alle Komponenten von \vec{L} einen scharfen Wert besitzen?

Aufgabe 41: Symmetrischer Kreisel (3 Punkte)

Ein symmetrischer Kreisel mit den Trägheitsmomenten $I_x = I_y$ und I_z lässt sich durch den Hamiltonoperator

$$H = \frac{1}{2I_x} (L_x^2 + L_y^2) + \frac{1}{2I_z} L_z^2$$

beschreiben.

- Berechnen Sie die Energie-Eigenwerte und die Eigenzustände des Hamiltonoperators.
- Wie groß ist der Erwartungswert des Operators $L_x + L_y + L_z$ in einem Energie-Eigenzustand des Systems?
- Der Kreisel befindet sich im Zustand $l = 3$ und $m = 0$. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ergibt die Messung von L_z zu einem Zeitpunkt t den Wert \hbar ?

Aufgabe 42: Quantenmechanischer Rotator (5 Punkte)

Ein Rotator mit zwei Freiheitsgraden, den Polarwinkeln ϑ und ϕ , befindet sich im Zustand mit der Wellenfunktion $Y(\vartheta, \phi) = N(\sin \vartheta \cos \phi + \sin \vartheta \sin \phi + \sqrt{3} \cos \vartheta)$.

- Drücken Sie $Y(\vartheta, \phi)$ als Linearkombination der $Y_{lm}(\vartheta, \phi)$ aus.
- Berechnen Sie den Normierungsfaktor N .
- Welche möglichen Messwerte können bei einer Messung von \vec{L}^2 und L_z auftreten?
- Mit welchen Wahrscheinlichkeiten treten die einzelnen Messwerte auf?

Aufgabe 43: Hyperfeinstrukturaufspaltung II (5 Punkte)

Berechnen Sie die Aufspaltung der Balmer- α Linie von Wasserstoff im Übergang $2s^2S_{1/2} \rightarrow 3p^2P_{3/2}$ im Magnetfeld. Benutzen Sie die in der letzten Übung angegebenen Ausdrücke für die Energieverschiebung von HFS-Niveaus für $l = 0$ und für $l > 0$. Geben Sie die HFS-Aufspaltung der Zustände und der Spektrallinien

- (1) ohne Magnetfeld und
- (2) für eine Magnetfeldstärke von $B = 1$ Tesla an.

Vernachlässigen Sie dabei die den Beitrag des Kern-Zeeman-Effektes zum g_j -Faktor.