

## Aufgabe 40: Unschärferelation für den Drehimpuls (7 Punkte)

- a) Leiten Sie mit Hilfe der Kommutatoren der Drehimpulskomponenten  $L_j$  die Unschärferelation für  $\Delta L_1 \cdot \Delta L_2$  her.
- b) Zeigen Sie, dass für die Drehimpuls-Eigenfunktionen  $|lm\rangle$  folgende Erwartungswerte gültig sind:

$$\begin{aligned}\langle lm|L_1|lm\rangle &= \langle lm|L_2|lm\rangle = 0, \\ \langle lm|L_1^2|lm\rangle &= \langle lm|L_2^2|lm\rangle = \frac{\hbar^2}{2}(l(l+1) - m^2).\end{aligned}$$

*Hinweis:* Drücken Sie  $L_1$  und  $L_2$  durch  $L_+$  und  $L_-$  aus und beachten Sie die Wirkung von  $L_+$  und  $L_-$  auf  $|lm\rangle$ .

- c) Berechnen Sie  $\Delta L_1 \cdot \Delta L_2$  im Zustand  $|lm\rangle$  und zeigen Sie, dass das Ergebnis im Einklang mit der Unschärferelation ist.
- d) In welchem Zustand  $|lm\rangle$  zu festem  $l$  besitzen die Unbestimmtheiten der Komponenten  $L_x$ ,  $L_y$  den kleinsten Wert und wie groß ist dieser?
- e) Gibt es in dem betrachteten Hilbert-Raum Zustände, in denen alle Komponenten von  $\vec{L}$  einen scharfen Wert besitzen?

## Aufgabe 41: Symmetrischer Kreisel (3 Punkte)

Ein symmetrischer Kreisel mit den Trägheitsmomenten  $I_x = I_y$  und  $I_z$  lässt sich durch den Hamiltonoperator

$$H = \frac{1}{2I_x}(L_x^2 + L_y^2) + \frac{1}{2I_z}L_z^2$$

beschreiben.

- a) Berechnen Sie die Energie-Eigenwerte und die Eigenzustände des Hamiltonoperators.
- b) Wie groß ist der Erwartungswert des Operators  $L_x + L_y + L_z$  in einem Energie-Eigenzustand des Systems?
- c) Der Kreisel befinde sich im Zustand  $l = 3$  und  $m = 0$ . Mit welcher Wahrscheinlichkeit ergibt die Messung von  $L_z$  zu einem Zeitpunkt  $t$  den Wert  $\hbar$ ?

## Aufgabe 42: Quantenmechanischer Rotator (5 Punkte)

Ein Rotator mit zwei Freiheitsgraden, den Polarwinkeln  $\vartheta$  und  $\phi$ , befinde sich im Zustand mit der Wellenfunktion  $Y(\vartheta, \phi) = N(\sin \vartheta \cos \phi + \sin \vartheta \sin \phi + \sqrt{3} \cos \vartheta)$ .

- a) Drücken Sie  $Y(\vartheta, \phi)$  als Linearkombination der  $Y_{lm}(\vartheta, \phi)$  aus.
- b) Berechnen Sie den Normierungsfaktor  $N$ .
- c) Welche möglichen Messwerte können bei einer Messung von  $\vec{L}^2$  und  $L_z$  auftreten?
- d) Mit welchen Wahrscheinlichkeiten treten die einzelnen Messwerte auf?

**Aufgabe 43: Hyperfeinstrukturaufspaltung II (5 Punkte)**

Berechnen Sie die Aufspaltung der Balmer- $\alpha$  Linie von Wasserstoff im Übergang  $2s^2S_{1/2} \rightarrow 3p^2P_{3/2}$  im Magnetfeld. Benutzen Sie die in der letzten Übung angegebenen Ausdrücke für die Energieverschiebung von HFS-Niveaus für  $l = 0$  und für  $l > 0$ . Geben Sie die HFS-Aufspaltung der Zustände und der Spektrallinien

- (1) ohne Magnetfeld und
- (2) für eine Magnetfeldstärke von  $B = 1$  Tesla an.

Vernachlässigen Sie dabei die den Beitrag des Kern-Zeeman-Effektes zum  $g_j$ -Faktor.