Übungen zur
Quantentheorie für Lehramtsstudierende und Informatiker/innen
(WS 2006/2007)

Blatt 9

Aufgabe 30: Teilchen im unendlich hohen Potenzialtopf (4 Punkte)

Ein Teilchen der Masse m befindet sich im unendlich hohen Potenzialtopf zwischen $x = 0$ und $x = L$. Sein Zustand ist gegeben durch

$$\psi(x) = Nx(L - x), \qquad 0 \leq x \leq L.$$

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit p_n, bei einer Energiemessung den Wert E_n zu finden? (2 Punkte)

b) Zeigen Sie mit Hilfe von $\sum_n p_n = 1$, dass gilt:

$$\frac{1}{1^6} + \frac{1}{3^6} + \frac{1}{5^6} + \frac{1}{7^6} + \cdots = \frac{\pi^6}{960}.$$

(2 Punkte)

Aufgabe 31: Optimierungsproblem (2 Punkte)

Für einen Zustand des harmonischen Oszillators mit verschwindenden Erwartungswerten $\langle P \rangle = \langle Q \rangle = 0$ ist der Erwartungswert der Energie

$$\langle E \rangle = \frac{1}{2m}(\Delta p)^2 + \frac{m\omega^2}{2}(\Delta x)^2.$$

Finden Sie das Minimum dieses Ausdrucks unter der Bedingung $\Delta x \cdot \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$ und kommentieren Sie das Ergebnis.

Aufgabe 32: Eigenwerte des harmonischen Oszillators (8 Punkte)

Sei φ_n mit $n \in \{0, 1, 2, \ldots\}$ die Familie normierter Eigenvektoren des eindimensionalen harmonischen Oszillators. Sei $\hat{A}$ die einem Operator A zugeordnete unendliche Matrix mit Einträgen $\hat{A}_{m,n} = (\varphi_m, A\varphi_n)$.

a) Berechnen Sie $\hat{P}$ und $\hat{Q}$. Schreiben Sie die linke obere Ecke dieser Matrizen bis zur 5. Zeile bzw. Spalte explizit auf. *Hinweis:* Benutzen Sie die Leiteroperatoren a und $a^\dagger$. (2 Punkte)

b) Bestimmen Sie die Matrixprodukte $\hat{P}^2$, $\hat{Q}^2$, $\hat{P}\hat{Q}$ und $\hat{Q}\hat{P}$. (4 Punkte)

c) Ermitteln Sie $\frac{1}{2m}\hat{P}^2 + \frac{m\omega^2}{2}\hat{Q}^2$ und $\hat{P}\hat{Q} - \hat{Q}\hat{P}$ und kommentieren Sie die Ergebnisse. (2 Punkt)