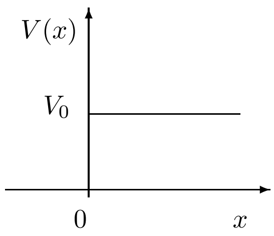
Übungen zur
Quantentheorie für Lehramtsstudierende und Informatiker/innen
(WS 2006/2007)

Blatt 6

Aufgabe 20: Potenzialstufe (6 Punkte)

Betrachten Sie ein quantenmechanisches Teilchen, das sich in folgendem Potenzial befindet:

$$V(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ V_0, & x \geq 0. \end{cases}$$



a) Bestimmen Sie die stationäre Wellenfunktion für ein von links einlaufendes Teilchen durch Verwendung der Anschlussbedingungen. (1 Punkt)

b) Ermitteln Sie für $E > V_0$ die Aufenthaltswahrscheinlichkeitsdichte, den Reflexions- und den Transmissionskoeffizienten. *Hinweis: Hierzu müssen die Ströme bestimmt werden.* (3 Punkte)

c) Berechnen Sie $\rho(x)$, T und R nun für $0 \leq E < V_0$ und vergleichen Sie die Ergebnisse mit Teil b). (2 Punkte)

Aufgabe 21: Metallelektron mit äußerem Feld (4 Punkte)

Das Potenzial eines Elektrons in einem Metall mit angelegtem äußeren elektrischen Feld $\mathcal{E}$ hat näherungsweise die Form

$$V(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x < 0 \\ V_0 - e_0 \mathcal{E} x, & x \geq 0. \end{cases}$$

a) Berechnen Sie den Gamow-Faktor $T = \exp\left(-\frac{2}{\hbar}\int_{x_0}^{x_1} dx\,\sqrt{2m_e(V(x)-E)}\right)$ für dieses Potenzial. (3 Punkte)

b) Für Wolfram ist die Austrittsarbeit $V_0 - E = 4,5$ eV. Berechnen Sie die Feldstärke $\mathcal{E}$, für die $T = 1/\mathrm{e}$ ist. (1 Punkt)

Aufgabe 22: Skalarprodukt und Hermitezität (5 Punkte)

Betrachten Sie den N-dimensionalen Raum $\mathbb{C}^N$ der komplexwertigen Spaltenvektoren

$$a = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_N \end{pmatrix}, \quad \alpha_i \in \mathbb{C}.$$

a) Ein Skalarprodukt $\langle a, b\rangle$ in $\mathbb{C}^N$ ist definiert durch das Matrixprodukt $a^\dagger \cdot b$, wobei $a^\dagger = (a^{\mathrm{T}})^*$ die zu a transponierte und komplex-konjugierte $1 \times N$-Matrix (Zeilenvektor) ist. Schreiben Sie dieses Skalarprodukt in Komponenten aus und verifizieren Sie die Eigenschaften:

(i) $\langle a, \gamma_1 b_1 + \gamma_2 b_2\rangle = \gamma_1\langle a, b_1\rangle + \gamma_2\langle a, b_2\rangle$ für $a, b_1, b_2 \in \mathbb{C}^N, \gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{C}$ (Linearität)

(ii) $\langle a, b\rangle = (\langle b, a\rangle)^*$ (Symmetrie bis auf Komplex-Konjugation)

(iii) $\|a\|^2 := \langle a, a\rangle$ ist positiv reell (≥ 0), wobei $\langle a, a\rangle = 0 \Leftrightarrow a = 0$ (positiv und nicht entartet)

Zeigen Sie, dass aus (i) und (ii) folgt: $\langle \gamma_1 b_1 + \gamma_2 b_2, a\rangle = \gamma_1^*\langle b_1, a\rangle + \gamma_2^*\langle b_2, a\rangle$ (Antilinearität)
(2 Punkte)

b) Es sei A ein Endomorphismus von $\mathbb{C}^N$, d.h. eine $N \times N$-Matrix (α_{ij}) mit Einträgen aus $\mathbb{C}$. Ein Endomorphismus heißt zu A adjungiert (Schreibweise: $A^\dagger$), wenn gilt:

$$\langle A^\dagger a, b\rangle = \langle a, Ab\rangle \qquad \forall\ a, b \in \mathbb{C}^N.$$

Geben Sie die Elemente der Matrix von $A^\dagger$ an. Ist $A^\dagger$ eindeutig bestimmt? (2 Punkte)

c) Ein Endomorphismus A von $\mathbb{C}^N$ heißt *hermitesch* oder *selbstadjungiert*, wenn $A^\dagger = A$ gilt.
Es seien A und B hermitesche Operatoren. Welche der folgenden Operatoren sind wiederum hermitesch? (1 Punkt)

- λA mit $\lambda \in \mathbb{C}$,
- AB,
- $[A, B] := AB - BA$,
- $\mathrm{i}[A, B]$.