Übungen zur
Quantentheorie für Lehramtsstudierende und Informatiker/innen
(WS 2006/2007)

Blatt 2

Aufgabe 5: Wellenpakete (8 Punkte)

a) Berechnen Sie das Wellenpaket in einer Dimension

$$\psi(x,t) = \int \frac{\mathrm{d}k}{2\pi}\,\varphi(k)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\cdot x - \mathrm{i}\omega t} \qquad \text{mit} \qquad \varphi(k) = \begin{cases} 1, & k_0 - \alpha \le k \le k_0 + \alpha \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Entwickeln Sie dazu die Dispersionsrelation in eine Taylorreihe um k_0 bis zum linearen Glied:

$$\omega(k) = \omega_0 + v_0(k - k_0).$$

b) Berechnen Sie das eindimensionale Wellenpaket

$$\psi(x) = \int \frac{\mathrm{d}k}{2\pi}\,\varphi(k)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\cdot x} \qquad \text{mit} \qquad \varphi(k) = \frac{1}{k^2+\alpha^2}\,.$$

c) Berechnen Sie in drei Dimensionen dasjenige Wellenpaket, welches die Impulsraum-Wellenfunktion

$$\varphi(\vec{k}) = \frac{1}{(|\vec{k}|^2 + \alpha^2)^2}$$

besitzt. *Hinweis:* Benutzen Sie Polarkoordinaten und führen Sie das Radialintegral durch partielle Integration auf das in b) aufgetretene Integral zurück.

d) Definieren Sie in allen drei Fällen geeignete Maße Δk und Δx für die Breite im k- und x-Raum (zum Beispiel die Halbwertsbreite, die Breite bei 1/e-tel des Maximalwertes, ...) und berechnen Sie jeweils $\Delta x \cdot \Delta k$.

Aufgabe 6: Zerfließen des Gauß'schen Wellenpaketes (5 Punkte)

a) Zeigen Sie, dass die Fouriertransformierte einer Gauß-Funktion

$$f(x) = A\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2a^2}}$$

wiederum eine Gauß-Funktion ist:

$$\tilde{f}(k) = \tilde{A}\,\mathrm{e}^{-\frac{a^2k^2}{2}}.$$

b) Die Wellenfunktion eines freien Teilchens sei zum Zeitpunkt $t = 0$:

$$\psi(x,0) = A\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4d^2}}.$$

Zeigen Sie, dass zu einem Zeitpunkt $t > 0$

$$|\psi(x,t)|^2 = |A(t)|^2\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2d(t)^2}}$$

gilt, wobei

$$d(t)^2 = d^2 + \frac{\hbar^2 t^2}{4m^2 d^2}.$$

Aufgabe 7: Wellenfunktionen und ihre Stromdichten (5 Punkte)

Berechnen Sie für die folgenden Wellenfunktionen $\psi(x)$ bzw. $\psi(\vec{r}\,)$ die Wahrscheinlichkeitsdichten und die Wahrscheinlichkeitsstromdichten.

a) $\psi(x) \;=\; A\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} + B\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}$ mit A und B komplex.
Interpretieren Sie das Ergebnis.

b) $\psi(x) \;=\; u(x)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx};\; u(x)$ komplexe Funktion.

c) $\psi(\vec{r}\,) \;=\; \dfrac{A}{r}\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}\vec{k}\vec{r}}$
Interpretieren Sie das Ergebnis. Wie groß ist der Teilchenfluss (Anzahl Teilchen pro Zeit) durch eine Kugeloberfläche mit Mittelpunkt bei $\vec{r} = 0$?