Übungen zur
Quantentheorie für Lehramtsstudierende und Informatiker/innen
(WS 2006/2007)

Blatt 12

Übungsklausur (ohne Wertung)

Aufgabe 1: Grundlagen

a) Formulieren Sie die zeitabhängige Schrödingergleichung.

b) Was sagt das Superpositionsprinzip aus?

c) Geben Sie die Kontinuitätsgleichung an. Wie sind Wahrscheinlichkeitsdichte und Wahrscheinlichkeitsstrom definiert?

d) Was sind stationäre Zustände und wie lautet ihre Zeitabhängigkeit?

e) Die stationäre Schrödingergleichung besitzt als Differenzialgleichung im Allgemeinen Lösungen zu beliebiger Energie E. Warum kann es sein, dass für einige Potenziale nur gewisse diskrete Werte E physikalisch zulässig sind?

f) Sei ψ ein normierter stationärer Zustand im physikalischen Hilbertraum und sei $\{\varphi_n\}$ ein diskretes vollständiges Orthonormalsystem.

- **i)** Wie lautet die Entwicklung von ψ nach den Zuständen $\{\varphi_n\}$?
- **ii)** Welche physikalische Bedeutung haben die Entwicklungskoeffizienten?
- **iii)** Wie lässt sich die Normierung von ψ durch die Entwicklungskoeffizienten ausdrücken?

g) Wie lautet das Matrixelement $(\psi, A\phi)$ mit Wellenfunktionen geschrieben?

h) A und B seien hermitesche Operatoren. Begründen Sie, welche der nachfolgenden Operatoren hermitesch sind:

- **i)** $AB + BA$
- **ii)** $AB - BA$
- **iii)** $\exp(A)$
- **iv)** $\exp(\mathrm{i}A)$

j) Wie sind die Unschärfen Δx und Δp für ein quantenmechanisches Teilchen definiert?

k) Geben Sie das Energiespektrum für ein Teilchen im unendlich hohen eindimensionalen Potenzialtopf der Breite L an.

l) Was bedeutet Entartung? Welchen Entartungsgrad haben die Energiewerte des Wasserstoffatoms (in der nichtrelativistischen Quantenmechanik ohne Spin)?

Aufgabe 2: Harmonischer Oszillator

a) Formulieren Sie den Hamiltonoperator für den eindimensionalen harmonischen Oszillator. Skizzieren Sie den Verlauf des Potenzials.

b) Der Absteigeoperator ist $a = \sqrt{\frac{m}{2\hbar\omega}}(\omega Q + \frac{\mathrm{i}}{m}P)$. Wie lautet der Aufsteigeoperator?

c) Geben Sie die Kommutatoren $[Q, P]$, $[a, a^\dagger]$, $[Q, a + a^\dagger]$, $[H, a^\dagger a]$ ohne lange Rechnung an.

d) Berechnen Sie die Matrixelemente $(\varphi_2, Q\varphi_0)$, $(\varphi_2, P\varphi_0)$, $(\varphi_2, Q^2\varphi_0)$, $(\varphi_2, P^2\varphi_0)$, wobei $\{\varphi_n\}$ die Eigenfunktionen zum Hamiltonoperator sind.

e) Wie lautet die Wellenfunktion des Grundzustandes?

Aufgabe 3: Quantenmechanischer Kasten

Ein Teilchen der Masse m befindet sich im eindimensionalen unendlich hohen Kasten der Breite L zwischen $x = -\frac{L}{2}$ und $x = \frac{L}{2}$. Die Wellenfunktion sei gegeben durch

$$\psi(x) = N\left(\mathrm{e}^{-a|x|} - \mathrm{e}^{-a\frac{L}{2}}\right).$$

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, bei einer Energiemessung die Energie des Grundzustandes zu finden?

Aufgabe 4: Zweidimensionaler Oszillator

Das Potenzial des zweidimensionalen harmonischen Oszillators lautet

$$V(x_1, x_2) = \frac{m}{2}(\omega_1^2\, x_1^2 + \omega_2^2\, x_2^2).$$

Welche Eigenwerte besitzt der Hamiltonoperator? Wie groß ist ihre Entartung für den Fall $\omega_2 = 2\omega_1$?

Aufgabe 5: Drehimpuls

Gegeben sei ein Eigenzustand zu $\vec{L}^2$ mit $l = 1$. Er sei außerdem Eigenzustand zu L_1 mit Eigenwert $\hbar$. Stellen Sie den Zustand durch die Kugelflächenfunktionen $Y_{l,m}$ dar.