Übungen zur
Quantentheorie für Lehramtsstudierende und Informatiker/innen
(WS 2006/2007)

Blatt 10

Abgabetermin: Dienstag, der 9.1.2007

Aufgabe 33: Dreidimensionaler harmonischer Oszillator (2 Punkte)

Welche Energie-Eigenwerte besitzt der dreidimensionale harmonische Oszillator mit

$$H = \frac{1}{2m}\vec{P}^2 + \frac{m\omega^2}{2}\vec{Q}^2\,?$$

Aufgabe 34: Zeitabhängigkeit von Erwartungswerten (4 Punkte)

a) Es sei H der Hamiltonoperator und A eine Observable. Für eine Lösung $\psi(\vec{r},t)$ der zeitabhängigen Schrödingergleichung ist $(\psi(t), A\,\psi(t))$ der zeitabhängige Erwartungswert von A. Zeigen Sie

$$\mathrm{i}\hbar\frac{d}{dt}\,(\psi(t), A\,\psi(t)) = (\psi(t), [A,H]\;\psi(t))\,.$$

(2 Punkte)

b) Sei $H = \dfrac{P^2}{2m} + V(Q)$. Zeigen Sie

$$\frac{d^2}{dt^2}\,(\psi(t), Q\,\psi(t)) = -\frac{1}{m}\,(\psi(t), V'(Q)\,\psi(t))\,.$$

(2 Punkte)
Hinweis: Benutzen Sie die Ergebnisse von Aufgabe 29.

Aufgabe 35: Oszillierendes Wellenpaket (4 Punkte)

Es sei $\psi(x,t)$ ein Wellenpaket im harmonischen Oszillator-Potenzial.

a) Zeigen Sie

$$|\psi(x,t+T)|^2 = |\psi(x,t)|^2\,,$$

wobei $T = 2\pi/\omega$ die Schwingungsperiode des harmonischen Oszillators ist. (2 Punkte)
Hinweis: Zerlegen Sie ψ in die Eigenfunktionen.

b) Zeigen Sie, dass der Erwartungswert des Ortes

$$\bar{x}(t) = (\psi(t), Q\,\psi(t))$$

die Schwingungsgleichung

$$\ddot{\bar{x}}(t) + \omega^2\bar{x}(t) = 0$$

erfüllt. Wie lautet deren allgemeine Lösung? (2 Punkte)
Hinweis: Benutzen Sie das Ergebnis der Aufgabe 34 b.

Fröhliche Weihnachten und ein frohes neues Jahr!