Übungen zur Vorlesung Physik I (WS 2009/2010) — Blatt 8

Prof. Dr. G. Münster, Prof. Dr. H. Zacharias

Abgabe der schriftlichen Lösungen: 15.12.2009

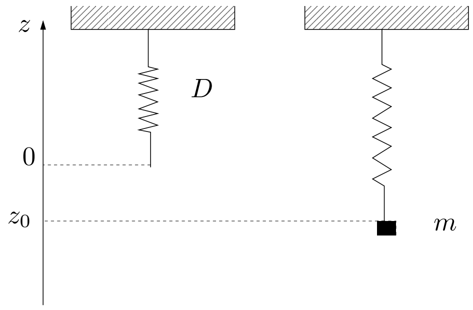
Aufgabe 1: Harmonischer Oszillator (schriftlich) (6 Punkte)

Gegeben sei ein Federpendel, bei dem die Masse m unter dem Einfluss der Schwerkraft an einer Feder mit der Federkonstanten D schwinge. Die Reibung werde vernachlässigt.

a) Geben Sie die Bewegungsgleichung an. Wie lautet die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung? Zeigen Sie, dass $z = z_0 = \text{const.}$ eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung ist. Wie lautet z_0? (2 Punkte)

b) Geben Sie die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung an. Bestimmen Sie die darin auftauchenden freien Parameter für die Anfangsbedingungen $z(0) = z_0$, $\dot{z}(0) = v_0$. (2 Punkte)

c) Berechnen Sie die kinetische Energie als Funktion der Zeit für die Anfangsbedingungen $z(0) = z_0$, $\dot{z}(0) = v_0$. Wählen Sie dabei die Konstante in der potenziellen Energie derart, dass $V(z = 0) = 0$ ist. Wie groß ist die Gesamtenergie E? (2 Punkte)



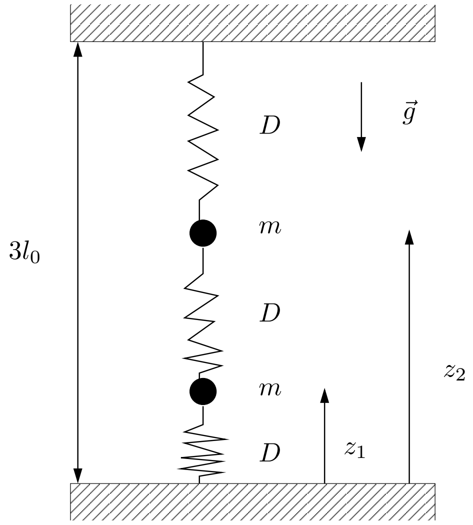
Aufgabe 2: Eigenschwingungen (schriftlich) (7 Punkte)

Zwei Massenpunkte der Masse m seien im homogenen Gravitationsfeld an drei gleichen Federn aufgehängt, welche die Federkonstante D und im ungedehnten Zustand die Länge l_0 besitzen. Die Massen sollen sich nur in vertikaler Richtung bewegen können.

a) Geben Sie die Bewegungsgleichungen für die Massenpunkte an. Bestimmen Sie die Gleichgewichtslage und führen Sie die Abweichungen von der Gleichgewichtslage als neue Variablen ein. Wie lauten die Bewegungsgleichungen in den neuen Variablen? (3 Punkte)

b) Bestimmen Sie die Eigenfrequenzen und Eigenvektoren des Systems und geben Sie die allgemeine Lösung an. (4 Punkte)

Abbildung zu Aufgabe 2:



Aufgabe 3: Im Potenzialtal (mündlich) (5 Punkte)

a) Seine große Bedeutung verdankt der harmonische Oszillator unter anderem der Tatsache, dass sich die Bewegung eines Massenpunktes nach einer *kleinen* Auslenkung aus einer stabilen Ruhelage durch eine einfache, harmonische Schwingung annähern lässt. Zeigen Sie, dass dies möglich ist. Welche Größe spielt in dieser Näherung die Rolle der Federkonstanten?
Hinweis: Betrachten Sie den eindimensionalen Fall und führen Sie eine Taylorentwicklung des Potenzials um den Gleichgewichtspunkt durch. (2 Punkte)

b) Ein Massenpunkt mit $m = 0,5\,\mathrm{kg}$ bewege sich im Potenzial

$$V(x) = -\frac{a}{x} + \frac{b}{x^2}, \qquad x > 0.$$

Dabei seien $a = 2\,\mathrm{Jm}$ und $b = 1\,\mathrm{Jm}^2$. Wie groß ist die Schwingungsperiode für sehr kleine Auslenkungen? (3 Punkte)

Aufgabe 4: Komplexe Zahlen (mündlich) (7 Punkte)

a) Berechnen Sie Real- und Imaginärteil der folgenden komplexen Zahlen. Geben Sie auch den Rechenweg an!

(i) $\sqrt{5+12\mathrm{i}}$ (ii) $\dfrac{2-\mathrm{i}}{2-3\mathrm{i}}$ (iii) $\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}(1+\mathrm{i})\right)^n$ für $n = 0,1,2,3,4$

(iv) $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/2}$ (v) $\mathrm{e}^{\mathrm{i}5\pi/4}$ (vi) i^{i} (vii) $(1+\mathrm{i})^{1+2\mathrm{i}}$

(5 Punkte)

b) Die beste aller möglichen Wurzeln: G. W. Leibniz war sehr beeindruckt, als er fand, dass

$$\sqrt{1+\sqrt{-3}} + \sqrt{1-\sqrt{-3}} = \sqrt{6}.$$

Zeigen Sie, dass die Gleichung stimmt. (2 Punkte)