

Aufgabe 1: Drehmatrizen (schriftlich) (6 Punkte)

- a) Eine Drehung um den Winkel φ um die z -Achse kann durch die Matrix

$$R(\vec{e}_z, \varphi) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

beschrieben werden. Zeigen Sie, dass die Menge dieser Drehmatrizen bzgl. der Multiplikation eine kommutative Gruppe bildet.

Hinweis: Die Forderungen der Abgeschlossenheit, der Assoziativität, der Existenz von Einselement und Inversem sowie des Kommutativgesetzes müssen erfüllt sein. (2 Punkte)

- b) Wie lautet die Matrix $R(\vec{e}_x, \psi)$ für eine Drehung um den Winkel ψ um die x -Achse? Berechnen Sie die Matrizen $S_1 = R(\vec{e}_z, \varphi)R(\vec{e}_x, \psi)$ und $S_2 = R(\vec{e}_x, \psi)R(\vec{e}_z, \varphi)$. Bildet die Menge der Drehmatrizen um beliebige Achsen auch eine kommutative Gruppe? (2 Punkte)
- c) Ein Einheitsvektor $\vec{c}$ in Richtung der Drehachse ist ein invarianter Vektor, d.h. es gilt $R \cdot \vec{c} = \vec{c}$. Berechnen Sie die invarianten Vektoren für die Drehungen S_1 und S_2 aus Teilaufgabe b) mit $\varphi = \psi = \frac{\pi}{2}$. (2 Punkte)

Aufgabe 2: Eine Kugel hält die Spur (schriftlich) (8 Punkte)

Ein Kreisring rotiere mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω um seinen vertikalen Durchmesser. Auf dem Kreisring kann sich ein Massenpunkt m reibungsfrei bewegen. Das Gravitationsfeld sei homogen.

- a) Stellen Sie die Bewegungsgleichung für den Massenpunkt m in demjenigen Koordinatensystem auf, in welchem der Kreisring ruht. Verwenden Sie dazu ebene Polarkoordinaten (r, ϑ) und drücken Sie die Gravitationskraft und die Scheinkräfte durch die Basisvektoren $\vec{e}_r$ und $\vec{e}_\vartheta$ aus.

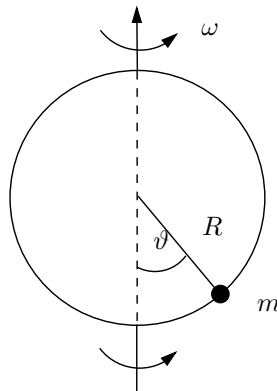
Hinweis: Da sich der Massenpunkt nur auf dem Kreisring bewegen kann, muss nur die ϑ -Komponente der Bewegungsgleichung betrachtet werden. (3 Punkte)

- b) Leiten Sie die gefundene Differenzialgleichung für $\vartheta(t)$ auch in einem Inertialsystem ab. Verwenden Sie hierzu Kugelkoordinaten (r, ϑ, φ) und beachten Sie, dass wiederum nur die ϑ -Komponente betrachtet werden muss. (2 Punkte)
- c) Diskutieren Sie die möglichen Gleichgewichtslagen, d.h. Lösungen mit $\vartheta = \text{const.}$, des Massenpunktes in Abhängigkeit von der Winkelgeschwindigkeit ω . (1 Punkt)
- d) Für geeignetes $V(\vartheta)$ ist die Energie

$$E = \frac{1}{2}mR^2\dot{\vartheta}^2 + V(\vartheta)$$

eine Erhaltungsgröße. Berechnen Sie $V(\vartheta)$. Skizzieren Sie $V(\vartheta)$ im Intervall $-\pi \leq \vartheta \leq \pi$ für die Fälle $\omega^2 = \frac{g}{2R}$ und $\omega^2 = 2\frac{g}{R}$. (2 Punkte)

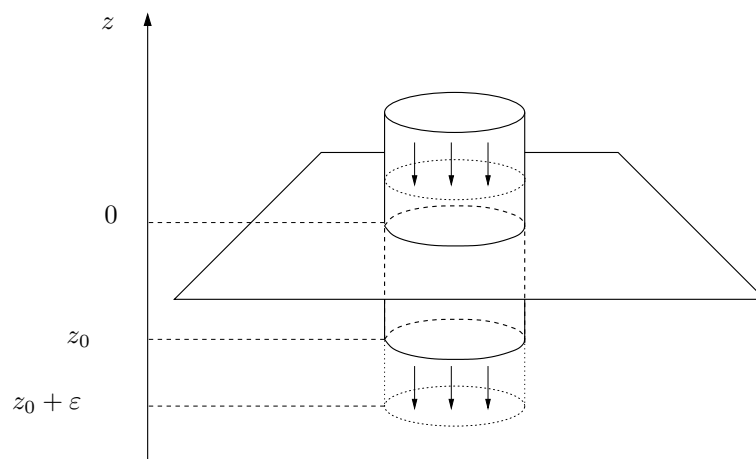
Abbildung zu Aufgabe 2:



Aufgabe 3: Die Boje (mündlich) (5 Punkte)

Ein Zylinder schwimmt mit vertikaler Achse in einer Flüssigkeit der Dichte σ und hat das Gewicht W und die Querschnittsfläche A . Wie groß ist die Schwingungsperiode T der Auslenkung $\varepsilon(t)$, wenn man den Zylinder leicht niederdrückt und dann freigibt? (Es gelte: $|\varepsilon| < |z_0|$.)

Hinweis: Die Auftriebskraft berechnet sich über das Archimedische Prinzip.



Aufgabe 4: Hammerwurf (mündlich) (5 Punkte)

Ein Massenpunkt m sei zunächst starr mit dem raumfesten Punkt O verbunden und rotiere mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω in der xy -Ebene in einem Abstand R um diesen Punkt. Zum Zeitpunkt $t = t_0$ werde die starre Verbindung zwischen O und dem Massenpunkt aufgehoben.

- Wie sieht für $t < t_0$ und $t > t_0$ die Bahnkurve $\vec{r}(t)$ des Massenpunktes im ruhenden Koordinatensystem Σ aus? Wie sieht die Bahnkurve $\vec{r}'(t)$ des Punktes im mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω um O rotierenden Bezugssystem Σ' aus? Skizzieren Sie die beiden Bahnkurven für den Fall $x(t_0) = R, y(t_0) = 0$. (3 Punkte)
- Für den Beobachter in Σ' sieht die Bewegung aus, als ob auf m eine Kraft wirke. Berechnen Sie diese Kraft. Wie hängt der Betrag dieser Kraft vom Abstand $|\vec{r}'(t)|$ der Masse m vom Ursprung ab? Setzen Sie $x'(t_0) = R$ und $y'(t_0) = 0$. (2 Punkte)