Übungen zur Vorlesung Physik I (WS 2009/2010) Blatt 6

Prof. Dr. G. Münster, Prof. Dr. H. Zacharias

Abgabe der schriftlichen Lösungen: 01.12.2009

Aufgabe 1: Lenz-Vektor (schriftlich) (8 Punkte)

Man bezeichnet den Vektor

$$\vec{A} = \left(\dot{\vec{r}} \times \vec{L}\right) + V(r)\vec{r} \qquad (\vec{L}\text{: Drehimpuls})$$

als zum Zentralpotenzial $V(r)$ gehörigen Laplace-Runge-Lenz-Vektor oder auch kurz als Lenz-Vektor.

a) Zeigen Sie, dass für das Potenzial

$$V(r) = -\frac{\alpha}{r} \qquad (\alpha > 0\text{, Kepler, Coulomb})$$

der Lenz-Vektor $\vec{A}$ eine Erhaltungsgröße ist. (2 Punkte)

b) Berechnen Sie den Betrag von $\vec{A}$ und drücken Sie das Ergebnis durch α, die Gesamtenergie E und den Drehimpuls L aus. (2 Punkte)

c) Stellen Sie mit Hilfe des Lenz-Vektors die Bahngleichung in der Form

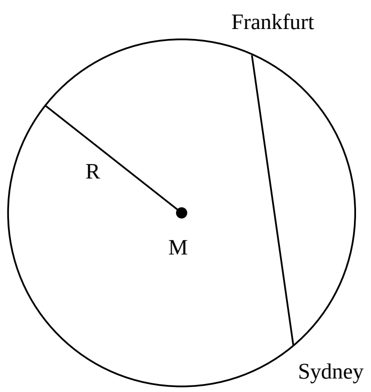
$$\frac{1}{r} = \frac{1 + \varepsilon \cos\varphi}{p} \qquad (\varphi\text{: Winkel zwischen } \vec{A} \text{ und } \vec{r})$$

auf und drücken Sie die Parameter p und ε durch die Masse m, die Konstante α, die Gesamtenergie E und den Drehimpuls L aus.
Hinweis: Betrachten Sie den Skalar $\vec{A} \cdot \vec{r}$. (2 Punkte)

d) Geben Sie die Richtung und anschauliche Bedeutung von $\vec{A}$ an. (2 Punkte)

Aufgabe 2: Drop me a line (schriftlich) (6 Punkte)

Zur Postbeförderung wird ein Tunnel von Frankfurt nach Sydney (Australien) gebohrt. Berechnen Sie die Kraft, die auf eine frei gleitende Rohrpostkapsel im Inneren des Tunnels wirkt und deren Komponente parallel zum Tunnel. Stellen Sie die Bewegungsgleichung für die Kapsel auf. Nehmen Sie die Erde dazu als ruhend und mit homogener Massenverteilung an und berechnen Sie zunächst das Gravitationspotenzial im Erdinneren.



Aufgabe 3: Bewegungstypen in Zentralfeldern (mündlich) (3 Punkte)

Diskutieren Sie anhand des effektiven Potenzials V_{eff} das Verhalten eines Teilchens in den Zentralfeldern

$$\text{a)}\, U \sim -\frac{1}{r^4}, \quad \text{b)}\, U \sim r^2, \quad \text{c)}\, U \sim -\frac{1}{r}$$

Skizzieren Sie dazu jeweils das effektive Potenzial und geben Sie die möglichen Bewegungstypen in Abhängigkeit von der Gesamtenergie E an.

Aufgabe 4: Keplerproblem (mündlich) (4 Punkte)

Sei $\vec{r}(t)$ die Bahn eines Massenpunktes im Gravitationsfeld einer Zentralmasse M, die sich im Nullpunkt des Koordinatensystems befindet.

a) Zeigen Sie, dass die Bahn

$$\vec{r}_\lambda(t) := \lambda^\alpha \vec{r}(\lambda^\beta t)$$

ebenfalls eine Lösung der Bewegungsgleichung ist, wenn α und β geeignet gewählt werden.
Hinweis: Benutzen Sie nur die Bewegungsgleichung und nicht die konkreten Lösungen in Form von Kegelschnitten. (3 Punkte)

b) Zeigen Sie, dass aus dem Ergebnis ein Spezialfall des 3. Kepler'schen Gesetzes folgt. (1 Punkt)