Übungen zur Vorlesung Physik I (WS 2009/2010) — Blatt 4

Prof. Dr. G. Münster, Prof. Dr. H. Zacharias

Abgabe der schriftlichen Lösungen: 17.11.2009

Aufgabe 1: Kraftfelder I(schriftlich) (7 Punkte)

a) Welche zeitunabhängige Kraft $F(\vec{r})$ muss auf einen Massenpunkt der Masse m wirken, damit er sich auf einer Ellipse gemäß

$$\vec{r}(t) = a\cos(\omega t)\vec{e}_x + b\sin(\omega t)\vec{e}_y$$

bewegt? (1 Punkt)

b) Gibt es zu dieser Kraft ein konservatives Kraftfeld im ganzen Raum? Wenn ja, berechnen Sie das zugehörige Potenzial. (2 Punkte)

c) Welche kinetische Energie besitzt der Massenpunkt? Wie groß ist seine Gesamtenergie?

(3 Punkte)

d) Berechnen Sie Drehimpuls $\vec{L}$ und Drehmoment $\vec{M}$ des Massenpunktes. (1 Punkt)

Aufgabe 2: Kraftfelder II(schriftlich) (9 Punkte)

a) Berechnen Sie

$$\oint_C \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r}$$

(i) für $\vec{F} = (F_x(x), F_y(y), F_z(z))$ und eine beliebige geschlossene Raumkurve C.

(ii) für $\vec{F} = f(|\vec{r}|)\vec{r}$ und eine beliebige geschlossene Raumkurve C.

(2 Punkte)

b) Untersuchen Sie, ob die Kraftfelder

$$\vec{F}_1(\vec{r}) = \begin{pmatrix} x \\ 2y \\ 3z \end{pmatrix}, \qquad \vec{F}_2(\vec{r}) = \begin{pmatrix} 0 \\ z^2 \\ y^2 \end{pmatrix}, \qquad \vec{F}_3(\vec{r}) = \begin{pmatrix} 3x^2 - 6y^2 \\ 2y + 3xz \\ 1 - 4xyz^2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{F}_4(\vec{r}) = \begin{pmatrix} y^2z^3 - 6xz^2 \\ 2xyz^3 \\ 3xy^2z^2 - 6x^2z \end{pmatrix}, \qquad \vec{F}_5(\vec{r}) = \eta r^3 \vec{r}$$

konservativ sind. Bestimmen Sie gegebenenfalls das jeweils zugrundeliegende Potenzial $V(\vec{r})$.

(5 Punkte)

c) Berechnen Sie die Wegintegrale $\int \mathrm{d}\vec{r} \cdot \vec{F}$ entlang der Wege

$$\vec{r}_a(t) = (t, t, t)\,, \qquad \vec{r}_b(t) = \left(t, t^2, t^3\right)$$

für $0 < t < 1$ und die beiden Felder $\vec{F}_1(\vec{r})$ und $\vec{F}_2(\vec{r})$. (2 Punkte)

Aufgabe 3: Arbeit, Leistung, Energie (mündlich) (6 Punkte)

Ein Massenpunkt der Masse m werde im Kraftfeld

$$\vec{F}\,(\vec{r}) = -\alpha \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3}$$

bewegt.

a) Welche Leistung $P(t)$ muss jeweils aufgebracht werden, um den Massenpunkt entlang der folgenden Bahnen zu führen?

$$\begin{aligned}
\vec{r}_{\mathrm{a}}(t) &= R\,(\cos(\omega t), \sin(\omega t), 0) && \text{mit} \quad 0 \leq t \leq 2\pi, \\
\vec{r}_{\mathrm{b}}(t) &= (D, vt, vt) && \text{mit} \quad 0 \leq t \leq 1, \\
\vec{r}_{\mathrm{c}}(t) &= (D, vt, 0) && \text{mit} \quad 0 \leq t \leq 1, \\
\vec{r}_{\mathrm{d}}(t) &= (D, v, vt) && \text{mit} \quad 0 \leq t \leq 1.
\end{aligned}$$

(2 Punkte)

b) Geben Sie für alle vier Bahnen die kinetische Energie E_{kin}, die potenzielle Energie V und die Gesamtenergie E als Funktion der Zeit an. (2 Punkte)

c) Berechnen Sie für alle vier Bahnen die jeweils geleistete Arbeit. (2 Punkte)

Aufgabe 4: Freier Fall im Gravitationsfeld (mündlich) (5 Punkte)

Ein Meteorit der Masse m unterliege nur der Erdanziehung. Er befinde sich zur Zeit $t = 0$ im Abstand $r = r_0$ vom Erdmittelpunkt in Ruhe. Die Gravitationskraft ist

$$\vec{F}(\vec{r}) = -\gamma \frac{mM}{r^3} \vec{r}$$

mit der Erdmasse M und der Gravitationskonstante γ. Der Erdradius sei R.

a) Zeigen Sie, dass die Kraft konservativ ist und das zugehörige Potenzial durch

$$V = -\gamma \frac{mM}{r}$$

gegeben ist. Wie groß ist die Gesamtenergie E des Meteoriten zur Zeit $t = 0$? (1 Punkt)

b) Mit welcher Geschwindigkeit v und nach welcher Zeit $t = t_1$ trifft der Meteorit auf der Erde auf? Wie groß ist die Geschwindigkeit im Grenzfall $r_0 \to \infty$? (4 Punkte)

Hinweis: Da der Meteorit zu Anfang ruht, fällt er in radialer Richtung auf die Erde zu. Es handelt sich deshalb um eine eindimensionale Bewegung. Berechnen Sie diese Bewegung, indem Sie die Gesamtenergie E als konstant voraussetzen.