

Aufgabe 1: Raumkurven (schriftlich) (10 Punkte)

Für die Bewegung eines geladenen Teilchens wird in kartesischen Koordinaten folgende Bahn $\vec{r}(t)$ gemessen:

$$\vec{r}(t) = \left(R \cos(\omega t), R \sin(\omega t), v_0 t + \frac{1}{2} a_0 t^2 \right).$$

- a) Berechnen Sie die Geschwindigkeit

$$\vec{v}(t) = \dot{\vec{r}}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt},$$

deren Betrag $v = |\vec{v}|$ sowie die Beschleunigung $\vec{a}(t) = \dot{\vec{v}}(t)$ und deren Betrag a . Zeigen Sie, dass die Beschleunigung die Form $\vec{a} = \vec{E} + (\vec{v} \times \vec{B}_M)$ mit konstanten Vektoren $\vec{E} = (0, 0, E)$ und $\vec{B}_M = (0, 0, B_M)$ annimmt. Welcher Zusammenhang besteht zwischen den Größen E , B_M und den Bahngrößen ω und a_0 ? Skizzieren Sie die Bahnkurve. (4 Punkte)

Für die folgenden Teilaufgaben sei $a_0 = 0$.

- b) Berechnen Sie den in der Zeit von 0 bis t zurückgelegten Weg $s(t)$. Anstelle der Zeit t kann auch die Bogenlänge s als Parameter für die Bahnkurve verwendet werden; man spricht dann von der *natürlichen Parametrisierung* der Kurve. Wie lautet $\vec{r}(s)$? Berechnen Sie den Tangenteneinheitsvektor

$$\vec{T}(s) = \frac{d\vec{r}(s)}{ds}.$$

(3 Punkt)

- c) Entlang der Bahn ändert sich im Allgemeinen die Richtung von $\vec{T}$. Die Richtung dieser Änderung wird durch den Normaleneinheitsvektor

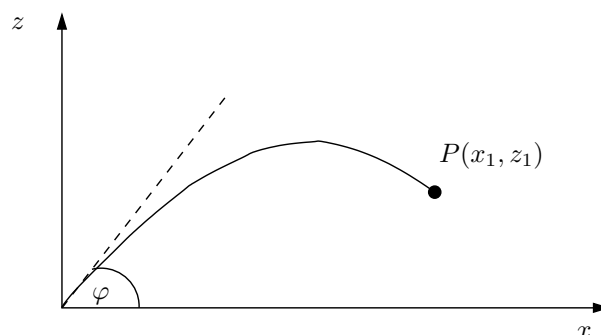
$$\vec{N}(s) = \rho \frac{d\vec{T}(s)}{ds}.$$

bestimmt. Der Normierungsfaktor ρ ist der Krümmungsradius. Berechnen Sie $\vec{N}(s)$ sowie ρ für die angegebene Bahn und vergleichen Sie ρ mit R . (2 Punkte)

- d) Als dritten Einheitsvektor definieren wir die Binormale $\vec{B} = \vec{T} \times \vec{N}$. $(\vec{T}, \vec{N}, \vec{B})$ bilden ein orthonormiertes Rechtssystem, das sogenannte *begleitende Dreibein*. Berechnen Sie $\vec{B}(s)$. (1 Punkte)

Aufgabe 2: Schiefer Wurf (schriftlich) (5 Punkte)

Ein Massenpunkt wird im homogenen Schwerefeld der Erde vom Ursprung aus mit der Geschwindigkeit v_0 im Winkel φ gegen die Horizontale abgeworfen.



- a) Wie muss v_0 in Abhängigkeit von φ gewählt werden, damit ein vorgegebener Punkt $P(x_1, z_1)$ getroffen wird?

Hinweis: Benutzen Sie passende Additionstheoreme trigonometrischer Funktionen. (2 Punkte)

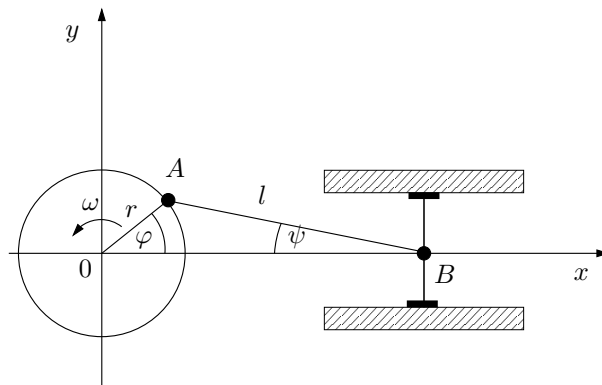
- b) Zeigen Sie, dass die Abwurfgeschwindigkeit minimal wird, wenn für den zugehörigen Winkel φ

$$\tan(2\varphi) = -\frac{x_1}{z_1}$$

gilt. Wie groß ist diese Minimalgeschwindigkeit in Abhängigkeit von x_1 und z_1 ? (3 Punkte)

Aufgabe 3: Die Kurbel (mündlich) (5 Punkte)

Eine Kurbel dreht sich mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω um eine feste Achse. Im Punkt A ist sie mit einer Pleuelstange der Länge l gelenkig verbunden, deren Ende B eine geradlinige Bewegung in x -Richtung ausführt.



- a) Bestimmen Sie die x -Koordinate des Punktes B sowie die Geschwindigkeit v , mit der er sich bewegt.

Hinweis: Benutzen Sie den Sinussatz und seine differenzierte Form. (2 Punkte)

- b) Berechnen Sie für den Fall $l \gg r$ eine Näherung der Geschwindigkeit und bestimmen Sie daraus die Beschleunigung des Punktes B .

Hinweise: Für $r \ll l$ kann $1/\cos\psi$ nach r/l in eine Taylor-Reihe um $r/l = 0$ entwickelt werden. Setzen Sie diese Entwicklung in die Bestimmungsgleichung für v ein und vernachlässigen Sie Terme dritter und höherer Ordnung.

(3 Punkte)

Aufgabe 4: Beschleunigung (mündlich) (3 Punkte)

Autofahrers Albtraum: Sie nähern sich mit einer Geschwindigkeit v_0 einer Kreuzung, als in einem Abstand x_0 von dieser Kreuzung die Ampel von Grün auf Gelb schaltet (die Länge der Gelbphase sei ΔT). Sie können bremsen (Verzögerung $\dot{v} = -a_1$, $a_1 > 0$) oder beschleunigen (Beschleunigung $\dot{v} = a_2$, $a_2 > 0$).

Berechnen Sie allgemein, welche Entscheidungen Sie in Abhängigkeit von x_0 treffen können (Reaktionszeit ≈ 0 s, damit Sie sich bei Rot nicht auf der Kreuzung befinden (die Straßenbreite sei L , die Länge des PKW l)).

Betrachten Sie anschließend folgendes Zahlenbeispiel: $v_0 = 60 \text{ km/h}$, $a_1 = 6 \text{ m/s}^2$, $a_2 = 2 \text{ m/s}^2$, $\Delta T = 3 \text{ s}$, $L = 12 \text{ m}$, $l = 4 \text{ m}$.

Welche unangenehme Situation kann bei schlechten Bremsen entstehen (z.B. $a'_1 = 0,1 \cdot a_1$)?