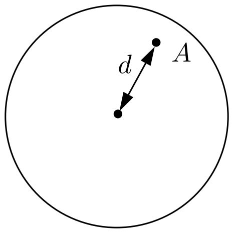
Übungen zur Vorlesung Physik I (WS 2009/2010) — Blatt 11

Prof. Dr. G. Münster, Prof. Dr. H. Zacharias

Abgabe der schriftlichen Lösungen: 19.01.2010

Aufgabe 1: Physikalisches Pendel (schriftlich) (3 Punkte)

Eine kreisförmige Scheibe konstanter Massendichte (Masse M) sei im Punkt A (im Abstand d vom Schwerpunkt) drehbar aufgehängt. Die Bewegung erfolge so, dass $\vec{\omega}$ stets senkrecht zur Scheibe stehe. Mit welcher Frequenz schwingt die Scheibe bei kleiner Auslenkung aus der Ruhelage? Wie lang müsste ein mathematisches Pendel sein, um mit der gleichen Frequenz zu schwingen?



Aufgabe 2: Trägheitstensoren (schriftlich) (10 Punkte)

a) Sei $\mathbf{I}^{(\mathbf{S})}$ der Trägheitstensor für ein körperfestes Koordinatensystem x_1, x_2, x_3, dessen Ursprung im Schwerpunkt S liege. Wenn man dieses Koordinatensystem um den festen Vektor $\vec{a}$ verschiebt, erhält man ein neues Koordinatensystem x'_1, x'_2, x'_3, dessen Achsen zu den alten Achsen parallel sind. Sei $\mathbf{I}'$ der in diesem zweiten System berechnete Trägheitstensor

$$I'_{ij} = \int d^3x' \rho(\vec{x'}) \left[\vec{x'}^2 \delta_{ij} - x'_i x'_j \right]$$

mit $\vec{x'} = \vec{x} + \vec{a}$. Zeigen Sie, dass gilt:

$$I'_{ij} = I^{(S)}_{ij} + m \left[\vec{a}^2 \delta_{ij} - a_i a_j \right] .$$

Dies ist die allgemeine Form des *Satzes von Steiner*. (1 Punkt)

b) Berechnen Sie den Trägheitstensor eines homogenen Würfels der Masse m und der Kantenlänge l für ein körperfestes Koordinatensystem, dessen Ursprung in einer unteren Ecke des Würfels liege und dessen Achsen parallel zu den Würfelflächen seien. (3 Punkte)

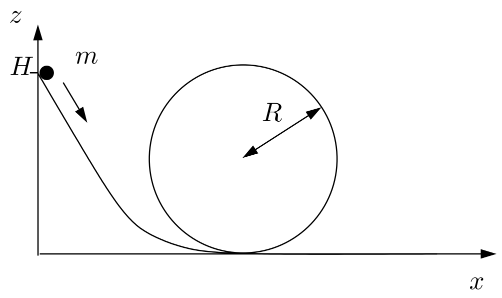
c) Trägheitstensoren sind **symmetrisch** und können daher nach Regeln der Linearen Algebra diagonalisiert werden. Die Eigenvektoren eines Trägheitstensors stehen senkrecht aufeinander (bei mehrfachen Eigenwerten ist eine Orthogonalisierung möglich) und sind – nach Normierung – die Basisvektoren des neuen Koordinatensystems. Sie zeigen in Richtung der Hauptträgheitsachsen. Die Eigenwerte sind alle reell und sind die Hauptträgheitsmomente.

Beschreiben Sie das mathematische Verfahren zur Diagonalisierung von Trägheitstensoren. Wie werden die Hauptträgheitsmomente (Eigenwerte) und Hauptträgheitsachsen (Eigenvektoren) eines gegebenen, nicht-diagonalen Trägheitstensors bestimmt? (2 Punkte)

d) Berechnen Sie die Hauptträgheitsmomente und Hauptträgheitsachsen des Würfels aus Aufgabenteil b). (4 Punkte)

Aufgabe 3: Looping (mündlich) (4 Punkte)

Eine Kugel mit Radius r und Masse m **rolle** auf einer Looping-Bahn. Auf welcher Höhe H muss sich der Schwerpunkt der Kugel beim Start mindestens befinden, damit sie eine Schleife mit dem Radius R durchlaufen kann, ohne aus der Bahn zu fallen?



Aufgabe 4: Stoßprozesse (mündlich) (4 Punkte)

a) Ein Teilchen mit Anfangsgeschwindigkeit v_0 stoße mit einem ruhenden Teilchen zusammen und werde um den Winkel φ abgelenkt. Seine Geschwindigkeit nach dem Stoß sei v_1. Das zweite Teilchen werde gestreut, wobei seine Geschwindigkeit den Winkel θ mit der Anfangsrichtung des ersten Teilchens bilde. Zeigen Sie, dass gilt:

$$\tan\theta = \frac{v_1 \sin\varphi}{v_0 - v_1 \cos\varphi}.$$

Müssen Sie einen elastischen oder einen inelastischen Stoß annehmen, um dieses Resultat zu erhalten? (2 Punkte)

b) Betrachten Sie folgendes Zahlenbeispiel: $m_2 = 2m_1$, $v_0 = 3\bar{v}$, $v_1 = \sqrt{5}\bar{v}$, $\tan\varphi = 2$. Bestimmen Sie die Geschwindigkeit v_2 der schwereren Kugel nach dem Stoß und den zugehörigen Winkel θ. Ist dieser Stoß elastisch? (2 Punkte)