Übungen zur Vorlesung Physik I (WS 2009/2010) — Blatt 10

Prof. Dr. G. Münster, Prof. Dr. H. Zacharias

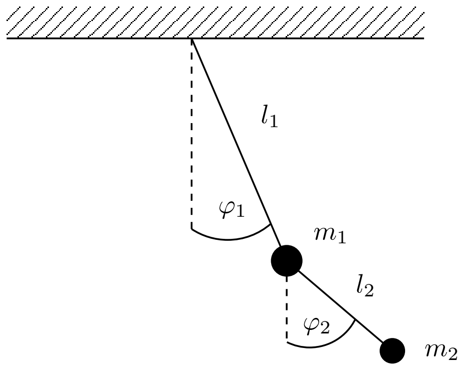
Abgabe der schriftlichen Lösungen: 12.01.2010

Aufgabe 1: Das ebene Doppelpendel (schriftlich) (7 Punkte)

Die Masse am Ende eines Pendels diene einem zweiten Pendel als Aufhängungspunkt. Man betrachte den Fall, dass die Bewegung beider Pendel in einer Ebene stattfindet.

a) Stellen Sie die Lagrange-Funktion für das ebene Doppelpendel auf und leiten Sie daraus die Bewegungsgleichungen her. (4 Punkte)

b) Betrachten Sie im Folgenden den Spezialfall $m_1 = m_2 = m$, $l_1 = l_2 = l$ und lösen Sie die Bewegungsgleichungen für kleine Schwingungen. Es sei dabei vorausgesetzt, dass l genügend groß ist, um $\dot{\varphi}\varphi^2 \approx 0$ anzunehmen. Geben Sie die Eigenfrequenzen an. (3 Punkte)

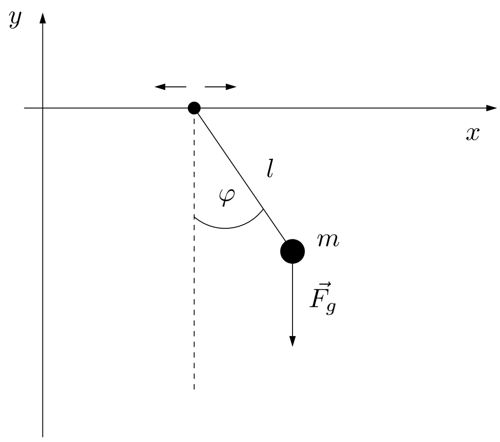


Aufgabe 2: Schwingend aufgehängtes Pendel (schriftlich) (5 Punkte)

Der Aufhängungspunkt eines Pendels führe Oszillationen gemäß $x = a\cos(\omega t)$ durch.

a) Formulieren Sie die Hamiltonfunktion für dieses Problem. (3 Punkte)

b) Geben Sie die Bewegungsgleichungen an. (2 Punkte)



Aufgabe 3: Wirkung und Energie (mündlich) (5 Punkte)

Betrachten Sie ein Teilchen der Masse m, welches sich in einem homogenen Schwerefeld mit Gravitationsbeschleunigung g bewege. Die Bahn $z(t)$ des Teilchens soll den Randbedingungen $z(0\,\mathrm{s}) = 0\,\mathrm{m}$ und $z(1\,\mathrm{s}) = 1\,\mathrm{m}$ genügen.

a) Berechnen Sie die Wirkung S für die folgenden hypothetischen Bahnformen:

$$\begin{aligned}
&\text{(i)} && z(t) = z_0 + z_1 t - \frac{g}{2}t^2 \\
&\text{(ii)} && z(t) = A\sin(\omega t) \qquad \text{mit} \qquad \omega = \frac{\pi}{2}\mathrm{s}^{-1} \\
&\text{(iii)} && z(t) = z_0 + z_1 t
\end{aligned}$$

Vergleichen Sie die drei Wirkungen und erklären Sie, warum Sie das Ergebnis nicht überrascht.

(3 Punkte)

b) Berechnen Sie für die Teilchenbahnen aus a) jeweils die Energie als Funktion der Zeit. Was fällt Ihnen auf? (2 Punkte)

Aufgabe 4: Schwerpunkt (mündlich) (5 Punkte)

a) Berechnen Sie den Schwerpunkt der acht Massenpunkte, die auf den Ecken eines Würfels der Kantenlänge 1 cm sitzen. Dabei sollen die vier Punkte, die im Falle eines Spielwürfels die Tischplatte berühren würden, die Masse 1 g, die anderen vier die Masse 3 g besitzen. (1 Punkt)

b) Weihnachten ist vorbei und der Tannenbaum hat schon viel von seinem Glanz (und seinen Nadeln) eingebüßt. Bei seiner Entsorgung möchte man möglichst am Schwerpunkt zupacken. Doch wo liegt dieser? In erster Näherung sei der Baum wie folgt aufgebaut: Stumpf: Zylinder mit Durchmesser 10 cm, Höhe 20 cm, Dichte $0,5\,\mathrm{g/cm^3}$. Rest: Kegel mit Grundflächendurchmesser 1 m, Höhe 2 m, Dichte $0,05\,\mathrm{g/cm^3}$. (4 Punkte)