

Übungen zur Statistischen Physik

PROF. DR. M. KLASSEN

Blatt 9

Abgabe: **22.06.2015**

Besprechung: ab **24.06.2015**

Aufgabe 22: Zustandsdichte eines freien Teilchens

(3 + 3 = 6 Punkte)

In einem Würfel der Kantenlänge L mit Volumen $V = L^d$ in $d \in \{1, 2, 3\}$ Raumdimensionen befindet sich ein freies Punktteilchen.

- a) Geben Sie die quantenmechanischen Eigenzustände $\psi(\vec{r})$ des Teilchens in Ortsdarstellung, sowie die Eigenenergien (Dispersion) $\varepsilon(\vec{k})$ an. An die Wellenfunktionen werden periodische Randbedingungen gestellt:

$$\psi(\vec{r} + L\vec{e}_\mu) = \psi(\vec{r}), \quad \mu = 1, 2, \dots, d.$$

Zeigen Sie, dass daraus folgt:

$$k_\mu = \frac{2\pi}{L}n_\mu, \quad n_\mu = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots, \quad \mu = 1, 2, \dots, d.$$

Zeigen Sie damit, dass im thermodynamischen Limes ($V \rightarrow \infty$) für eine beliebige Funktion $F(\vec{k})$ gilt:

$$\frac{1}{V} \sum_{\vec{k}} F(\vec{k}) \equiv \frac{1}{V} \sum_{k_1, k_2, \dots, k_d} F(k_1, k_2, \dots, k_d) \longrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk_1}{2\pi} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk_d}{2\pi} F(k_1, \dots, k_d).$$

- b) Berechnen Sie nun mithilfe der Ergebnisse aus a) die Zustandsdichte

$$\mathcal{N}(\varepsilon) = \frac{1}{V} \sum_{\vec{k}} \delta(\varepsilon - \varepsilon(\vec{k}))$$

des freien Teilchens für $d = 1, 2, 3$ im thermodynamischen Limes.

Hinweis: Verwenden Sie Polar- und Kugelkoordinaten.

Aufgabe 23: Eigenschaften eines fermionischen Quantengases

(1 + 2 + 3 = 6 Punkte)

Die Teilchen eines Quantengases bestehend aus Fermionen mit Spin $\frac{1}{2}$ besetzen bei einer Temperatur T endlich viele Ein-Teilchen-Energieniveaus ϵ_r , $r = 1, 2, \dots, M$.

- a) Was ist der Maximalwert des Eigenwerts der Gesamtteilchenzahl $\langle \hat{N} \rangle$? Welche Eigenschaft des Systems liegt dieser Beschränkung zugrunde?
- b) Bestimmen Sie die großkanonische Zustandssumme $\mathcal{Z}$.
- c) Zeigen Sie nun durch Betrachtung der Beziehung

$$F = -k_B T \ln \mathcal{Z} + \mu \langle \hat{N} \rangle,$$

dass ein anderes System bestehend aus $2M - \langle \hat{N} \rangle$ „Löchern“ die gleichen thermodynamischen Eigenschaften besitzt, wenn diese mit dem chemischen Potential $-\mu$ auf die Energieniveaus $-\epsilon_r$ verteilt werden.

Aufgabe 24: Mittlere Besetzungszahlen

(4 Punkte)

Berechnen Sie für ein ideales Quantengas (aus Bosonen bzw. Fermionen) die mittlere quadratische Schwankung in den Ein-Teilchen-Besetzungszahlen,

$$(\Delta n_j)^2 := \langle \hat{n}_j^2 \rangle - \langle \hat{n}_j \rangle^2.$$

Verwenden Sie Ihr Wissen aus der Vorlesung.