WWU SS 2015

Übungen zur Statistischen Physik

Prof. Dr. M. Klasen

Blatt 8

Abgabe: **15.06.2015**
Besprechung: ab **17.06.2015**

Aufgabe 20: System von harmonischen Oszillatoren ($2 + 4 + 6 = 12$ Punkte)

Betrachten Sie ein System von N unabhängigen und *unterscheidbaren* 1-dim. harmonischen Oszillatoren, beschrieben durch die folgende Hamiltonfunktion:

$$H = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{p_i^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 x_i^2 \right).$$

a) Berechnen Sie die klassische mikrokanonische Entropie als Funktion der Energie $E = U$. Betrachten Sie das Phasenraumvolumen. Nehmen Sie die Stirling-Näherung als gerechtfertigt an. Was ist die Temperatur?

   Hinweis: Überlegen Sie sich eine geschickte Variablentransformation, mit welcher Sie die Lösung des Phasenraumintegrals direkt ablesen können.

b) Berechnen Sie klassisch das kanonische Zustandsintegral, die freie Energie, Entropie, innere Energie und spezifische Wärme C_V als Funktionen der Temperatur. Vergleichen Sie die Entropie mit der unter a) erhaltenen mikrokanonischen Entropie.

c) Wiederholen Sie die unter b) durchgeführten Berechnungen für den quantenmechanischen Fall, indem Sie von der kanonischen Zustandssumme ausgehen. Diskutieren Sie die innere Energie und die spezifische Wärme für hohe und tiefe Temperaturen.

Hinweis für b) und c): Beachten Sie, dass die kanonische Zustandssumme für unabhängige und unterscheidbare Oszillatoren faktorisiert.

Aufgabe 21: Spin im kanonischen Ensemble (6 Punkte)

Betrachten Sie die beiden Spinzustände eines Elektrons im Magnetfeld $\vec{B} = B_0 \vec{e}_z$ bei einer Temperatur T. Der Hamilton-Operator des Systems ist

$$\hat{H} = -\hat{\vec{\mu}}_s \cdot \vec{B} = g\mu_B \frac{1}{\hbar} \hat{S}_z B_z$$

mit dem magnetischen Spinmoment des Elektrons $\hat{\vec{\mu}}_s = -g\mu_B \frac{1}{\hbar} \hat{\vec{S}}$, dem Landé-Faktor $g = 2$ sowie dem Bohrschen Magneton $\mu_B = \frac{e\hbar}{2m_e}$. Bestimmen Sie:

i) die Magnetisierung M (d.h. den Erwartungswert von $\hat{\vec{\mu}}_s$ pro Volumen V),

ii) den Erwartungswert der Energie,

iii) die Wahrscheinlichkeit, das Elektron in einem der beiden Spin-Zustände anzutreffen, und

iv) die Entropie des Systems.

Benutzen Sie hierzu das quantenmechanische kanonische Ensemble. Bestimmen Sie ferner die magnetische Suszeptibilität $\chi = \mu_0 \, \partial M / \partial B$ (μ_0: Vakuumpermeabilität). Diskutieren Sie das Verhalten der Magnetisierung und der Suszeptibilität bei sehr starkem und sehr schwachem Magnetfeld.