Übungen zur Statistischen Physik

Prof. Dr. M. Klasen

Blatt 5

Abgabe: **11.05.2015**
Besprechung: ab **13.05.2015**

Die Übungen am 14.05.2015 **fallen** aufgrund des Feiertags **aus**!
Die **Besprechung** dieses Blattes findet für die Donnerstagsgruppen also erst eine Woche später statt.

Aufgabe 13: Legendre-Transformationen ($3 + 2 + 3 = 8$ Punkte)

Gegeben sei eine Kurve $y(x)$ in einem Bereich, in welchem sich das Vorzeichen ihrer Krümmung nicht ändert. Jeder Punkt dieser Kurve kann eindeutig durch die Koordinaten x und $y(x)$ beschrieben werden. Alternativ kann ein Punkt auch durch die Steigung der Kurve in diesem Punkt sowie den y-Achsenabschnitt der Tangente durch diesen Punkt beschrieben werden. Die Steigung werde mit $m = \partial y/\partial x$, der y-Achsenabschnitt mit $c(m)$ bezeichnet. Ein jeder Punkt auf der Kurve wird also nun durch zwei neue unabhängige Variablen m und $c(m)$ beschrieben.

a) Zeigen Sie grafisch den Zusammenhang zwischen den Größen x, y, m und c und folgern Sie daraus die Form der Legendre-Transformation $c(m)$ (und ihrer Rücktransformation). Zeigen Sie hiervon ausgehend, dass die totalen Differentiale der Kurve und ihrer Legendre-Transformierten durch

$$\mathrm{d}y(x) = m(x)\mathrm{d}x \qquad \text{und} \qquad \mathrm{d}c(m) = -x(m)\mathrm{d}m$$

gegeben sind. Nutzen Sie die Tatsache, dass aufgrund der obigen Beziehung $m = m(x)$ eine Funktion $x = x(m)$ definiert werden kann.

b) Bestimmen Sie die Legendre-Transformation $c(m)$ von $y(x) = Ae^{Bx}$. Verifizieren Sie explizit, dass die Rücktransformation von $c(m)$ gerade $y(x)$ ist.

c) Betrachten Sie nun eine zweidimensionale Fläche $U(S, V)$ mit positiver Steigung bezüglich S, negativer Steigung bezüglich V und unveränderlichem Vorzeichen der Krümmung. Führen Sie jeweils eine Legendre-Transformation für konstant gehaltenes V bzw. S durch. Bezeichnen Sie die Steigungen mit $T = \partial U/\partial S|_V$, $p = -\partial U/\partial V|_S$, die „Achsenabschnitte“ mit $F(T, V)$ sowie $H(S, p)$. Bestimmen Sie auch hier die Form der totalen Differentiale von $U(S, V)$, $F(T, V)$ und $H(S, p)$.

Hinweis: Machen Sie sich bei Ihren Rechnungen klar, welche der Variablen unabhängig sind und welche durch die unabhängigen ausgedrückt werden müssen. Nutzen Sie weiterhin, dass die partielle Ableitung einer Funktion $z(x, y)$, $\frac{\partial z}{\partial x}\Big|_y$ (dabei bedeutet $\Big|_y$, dass bei der Ableitung y konstant gehalten wird), zu

$$\frac{\partial z}{\partial x}\bigg|_y = \frac{\partial z}{\partial x}\bigg|_w + \frac{\partial z}{\partial w}\bigg|_x \frac{\partial w}{\partial x}\bigg|_y$$

oder über die Kettenregel

$$\frac{\partial z}{\partial x}\bigg|_y = \frac{\partial z}{\partial w}\bigg|_y \frac{\partial w}{\partial x}\bigg|_y$$

umgeschrieben werden kann.

Aufgabe 14: Ideales Gas im Schwerefeld $(3 + 2 + 2 + 1 = 8 \text{ Punkte})$

Ein ideales Gas mit N ununterscheidbaren Molekülen der Masse m sei in einem zylindrischen Behälter mit Grundfläche A und Höhe h enthalten.

a) Berechnen Sie die Zustandssumme für das System unter Berücksichtigung des Beitrages der Schwerkraft. Bestimmen Sie hierzu die Zustandssumme eines einzelnen Teilchens und überlegen Sie sich, wie sich die Zustandssumme aus mehreren nicht wechselwirkenden Systemen zusammensetzt. Vergessen Sie nicht, dass die Moleküle ununterscheidbar sein sollen!

b) Berechnen Sie die innere Energie des Systems.

c) Unter welcher Bedingung kann der Beitrag der Schwerkraft vernachlässigt werden? Wenden Sie diese Näherung auf die innere Energie aus b) an. Was erhalten Sie?

d) Ist die Bedingung aus c) erfüllt für ein Gas bestehend aus Sauerstoffmolekülen in einem 1 Meter hohen Zylinder bei Raumtemperatur? Die inneren Freiheitsgrade der Sauerstoffmoleküle sollen vernachlässigt werden.