Übungen zur Statistischen Physik

Prof. Dr. M. Klasen

Blatt 3

Abgabe: **27.04.2015**
Besprechung: ab **29.04.2015**

Aufgabe 7: Charakteristische Funktionen (7 Punkte)

Die charakteristische Funktion $G(k)$ der Dichtefunktion $w(x)$ einer kontinuierlichen Wahrscheinlichkeitsverteilung ist definiert als

$$G(k) := \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, w(x) e^{ikx} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ik)^n}{n!} \langle x^n \rangle \tag{1}$$

mit den Momenten $\langle x^n \rangle$. Ist die charakteristische Funktion bekannt, lassen sich die Momente einfach aus den Ableitungen berechnen:

$$\langle x^n \rangle = \frac{1}{i^n} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}k^n} G(k) \Big|_{k=0} . \tag{2}$$

Bestimmen Sie die charakteristische Funktion der Gauß-Verteilung und berechnen Sie mit Hilfe der Definition der Momente (2) die Varianz $\Delta x^2 = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2$. Wie ändert sich die Definition (1) für eine diskrete Wahrscheinlichkeitsverteilung?

Hinweis: Die Dichtefunktion der Gauß-Verteilung ist gegeben durch

$$w(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

mit Mittelwert μ und der Varianz σ^2.

Aufgabe 8: Harmonischer Oszillator ($2 + 2 + 3 = 7$ Punkte)

Der klassische harmonische Oszillator wird beschrieben durch die Hamiltonfunktion

$$H(q,p) = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 q^2.$$

a) Unter welchen Bedingungen ist die Hamiltonfunktion mit der Energie des Systems identisch, $H(q,p) = E$? Geben Sie dafür qualitativ (= ohne explizit zu rechnen) die Form der Phasenraumtrajektorie an.

b) Bestimmen Sie die normierte Dichteverteilungsfunktion des mikrokanonischen Ensembles.

c) Berechnen Sie damit die Varianzen von Ort Δq^2 und Impuls Δp^2. Was bedeuten diese Größen bzw. gibt es noch andere Möglichkeiten, sie zu berechnen?

Aufgabe 9: Kontinuitätsgleichung ($1 + 3 + 3 = 7$ Punkte)

a) Geben Sie eine kurze, aber anschauliche Interpretation für die Dichteverteilungsfunktion ρ.

b) Zeigen Sie, dass die Kontinuitätsgleichung für ρ,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j} = 0$$

erfüllt ist. Hierbei ist $\vec{j} = \rho \vec{v}$ die Systemstromdichte, $\vec{v} = (\dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_s, \dot{p}_1, \dot{p}_2, \ldots, \dot{p}_s)$ die Phasenraumgeschwindigkeit mit den ersten Zeitableitungen der verallgemeinerten Koordinaten und Impulse q_i und p_i und s die Anzahl der Freiheitsgrade. Überlegen Sie sich, was die Aussage von $\frac{\partial \rho}{\partial t}$ und $\operatorname{div} \vec{j}$ ist.

c) Was folgt aus der Kontinuitätsgleichung für ρ?

Hinweis: Die Divergenz wird im $2s$-dimensionalen Phasenraum zu

$$\operatorname{div} \vec{A} = \sum_{i=1}^{s} \frac{\partial A_i}{\partial q_i} + \sum_{i=1}^{s} \frac{\partial A_{i+s}}{\partial p_i}$$

verallgemeinert.