Übungen zur Statistischen Physik

Prof. Dr. M. Klasen

Blatt 2

Abgabe: **20.04.2015**
Besprechung: ab **22.04.2015**

Aufgabe 4: Nützliche Integrale (2 + 2 + 2 = 6 Punkte)

Die folgenden Integrale tauchen in der Quantentheorie sowie in der Statistischen Physik sehr häufig auf. Berechnen Sie ohne die Verwendung von Integraltabellen oder Mathematica

a) $\int_0^\infty \mathrm{d}x\, x^n e^{-ax}$,

b) $\int_0^\infty \mathrm{d}x\, x^{2n} e^{-bx^2}$,

c) $\int_0^\infty \mathrm{d}x\, x^{2n+1} e^{-cx^2}$,

wobei $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ und $n \in \mathbb{N}_0$ gilt. Machen Sie sich hierzu Gedanken darüber, wie man das „Gauß-Integral“ $\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, e^{-\alpha x^2}$ lösen könnte.

Aufgabe 5: Unvollständige Vorinformationen (1 + 3 + 3 = 7 Punkte)

Über ein aus $n = 5$ Teilchen bestehendes System ist nur bekannt, dass sich in Bezug auf eine bestimmte Teilcheneigenschaft jedes Teilchen in einem der (Einzel-)Zustände mit den Werten a oder b befinden kann. Weiterhin seien n_a und n_b die Zahlen der Teilchen in den Zuständen a und b.

a) Welche möglichen Aufteilungen (n_a, n_b) gibt es?

b) Welche denkbaren (System-)Zustände zu den Aufteilungen (n_a, n_b) gibt es? Geben Sie alle explizit an.

c) Wie wahrscheinlich sind die Aufteilungen (n_a, n_b)? Welcher statistischen Verteilung entsprechen diese Wahrscheinlichkeiten?

Aufgabe 6: Übergang von Binomial- zu Gauß-Verteilung (8 Punkte)

Zeigen Sie, dass unter Annahme von $N \gg \bar{n} \gg 1$ mit dem Mittelwert $\bar{n} \equiv \langle n \rangle = Np$ die Binomialverteilung

$$w_N(n) = \binom{N}{n} p^n (1-p)^{N-n}$$

in der Nähe des Maximums die Form einer Gauß-Verteilung annimmt. Betrachten Sie hierzu den Logarithmus der Verteilungsfunktion und wenden Sie die logarithmische Version der Stirling-Formel

$$\ln m! \approx m \ln m - m + \frac{1}{2} \ln(2\pi m)$$

auf die Terme im Binomialkoeffizienten an. Führen Sie die Abweichung zum Mittelwert ν über $n = \bar{n} + \nu$ ein. Drücken Sie p durch N und $\bar{n}$ aus und vernachlässigen Sie, falls nötig, Terme der Ordnung ν^3 und höher. Was ergibt sich als Breite der Gauß-Kurve?

Hinweis: Verwenden Sie die Entwicklung

$$\ln(1 \pm \alpha) \approx \pm\alpha - \frac{\alpha^2}{2}$$

für $\alpha \ll 1$.