

# Übungen zur Quantentheorie

Prof. Dr. M. Klasen

## Blatt 8

Abgabe: 08.12.2014  
Besprechung: 11.12.2014

### Aufgabe 21: Quadrupolmoment und das Wigner-Eckart Theorem (8 Punkte)

- (a) Schreiben sie  $xy$ ,  $xz$  und  $(x^2 - y^2)$  als Komponenten eines irreduziblen sphärischen Tensoroperators vom Rang 2.

*Hinweis:* Die Kugelflächenfunktionen  $Y_l^m$  sind irreduzible sphärische Tensoroperatoren vom Rang  $l$ . Schreiben Sie die in Frage kommenden  $Y_l^m$  in kartesischen Koordinaten.

- (b) Das Quadrupolmoment lässt sich als der Erwartungswert

$$Q = e\langle\alpha, j, m = j | 3z^2 - r^2 | \alpha, j, m = j \rangle$$

schreiben. Drücken Sie das Matrixelement

$$M = e\langle\alpha, j, m' | x^2 - y^2 | \alpha, j, m' \rangle$$

(mit  $m = j, j-1, \dots$ ) durch  $Q$  und geeignete Clebsch-Gordan Koeffizienten aus.

### Aufgabe 22: Landé $g$ -Faktor (7 Punkte)

Betrachten Sie ein Elektron in einem Atom in einem  $^2D_{3/2}$  Zustand d.h. mit Spin  $s = 1/2$ , Bahndrehimpuls  $l = 2$  und Gesamtdrehimpuls  $j = 3/2$ . In einem schwachen externen magnetischen Feld wird die Energie verschoben durch einen zusätzlichen Term (Zeeman Effekt)

$$H'_Z = -(\vec{\mu}_L + \vec{\mu}_S) \cdot \vec{B}_{\text{ext}} \quad \text{mit} \quad \vec{\mu}_L = -\frac{e}{2m} \vec{L} \quad \text{und} \quad \vec{\mu}_S = -\frac{e}{m} \vec{S}$$

Die Energieverschiebung verursacht durch einen Magnetfeld in der  $z$ -Richtung in erster Ordnung Störungstheorie ist gegeben durch

$$E_Z = \langle nljm_J | H'_Z | nljm_J \rangle$$

Benutzen Sie das Wigner-Eckart Theorem (oder das Projektionstheorem) und zeigen Sie dass die Energieverschiebung für ein Magnetfeld in der  $z$ -Richtung lautet

$$E_Z = \langle nljm_J | H'_Z | nljm_J \rangle = \mu_B g_J B_{\text{ext}} m_J$$

wo  $g_J$  ist der Landé  $g$ -Faktor

$$g_J = 1 + \frac{j(j+1) - l(l+1) + s(s+1)}{2j(j+1)}.$$

In wie viele separate Zustände splittet sich der  $^2D_{3/2}$  Zustand auf? Was sind die Energie differenzen zwischen den Zuständen?

**Aufgabe 23: Harmonischer Oszillator mit Störung****(5 Punkte)**

Ein eindimensionaler harmonischer Oszillator mit Frequenz  $\omega$  bekommt einen Störterm

$$V = \frac{1}{2}\epsilon m\omega^2 x^2.$$

Bestimmen Sie den gestörten Grundzustand in erster und dessen Energiedifferenz in zweiter Ordnung der zeitunabhängigen Störungsrechnung. Sie können das Problem auch exakt lösen. Wie vergleicht sich Ihr Ergebnis für das gestörte Energieniveau mit dem exakten Ergebnis für  $\epsilon \rightarrow 0$ ?