Übungen zur Quantentheorie

Prof. Dr. M. Klasen

Blatt 5

Abgabe: 17.11.2014
Besprechung: 20.11.2014

Aufgabe 12: Drehungen von Vektoren und Vektorfeldern **(4 Punkte)**

Betrachten Sie die Drehungen in der xy-Ebene.

(a) Zeigen Sie, dass sich die Komponenten eines Vektors $\vec{V}$ bei einer Drehung um einen Winkel φ wie

$$V^i \mapsto V'^i = R_{ij} V^j \qquad \text{mit} \qquad R = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

transformieren.

(b) Schreiben Sie mit Hilfe der Drehmatrix R wie sich die Komponenten eines Vektorfeldes $\vec{V}(\vec{r})$ bei der Drehung um einen Winkel φ verhalten. Erklären Sie die Transformation.

Aufgabe 13: Matrizengruppen **(6 Punkte)**

Zeigen Sie, dass die folgende spezielle Matrizen mit herkömmlicher Matrixmultiplikation, Gruppen sind.

(a) Alle orthogonale $n \times n$ Matrizen A d.h. Matrizen für die $A^T . A = \mathbf{1}$ gilt.

(b) Alle spezielle unitäre $n \times n$ Matrizen U d.h. Matrizen für die $U^+ . U = \mathbf{1}$ und $\det U = 1$ gilt.

Hinweis: Vergessen Sie nicht zu zeigen dass die Multiplikation von zwei Matrizen auf eine Matrix führt die auch die gleiche Eigenschafften besitzt.

Aufgabe 14: Zusammenhang zwischen Lie Gruppen und Lie Algebren **(10 Punkte)**

(a) Wie bereits in der Aufgabe 32 diskutiert, ein Vektor $\mathbf{a}$ gedreht um eine Achse $\mathbf{n}$ mit Winkel φ ist

$$\mathbf{a}' = (\mathbf{a}.\mathbf{n})\mathbf{n} + \mathbf{a}_\perp \cos\varphi + \mathbf{n} \times \mathbf{a} \sin\varphi.$$

Zeigen Sie dass die Drehung auch durch eine Matrix

$$R_{ij}(\mathbf{n}, \alpha) = \cos\alpha\, \delta_{ij} + (1 - \cos\alpha)\, n_i n_j - \sin\alpha\, \varepsilon_{ijk} n_k$$

ausgedruckt werden kann.

(b) Überprüfen Sie dass die gleiche Drehmatrix R kann man schreiben als

$$R_{ij}(\mathbf{n}, \alpha) = \Big[\exp\big(\alpha\, \mathbf{n}.\mathbf{l}\big) \Big]_{ij} \qquad \text{mit} \qquad (l_i)_{jk} = -\varepsilon_{ijk}$$

(c) Zeigen Sie dass jede unitäre Matrix U mit $\det U = +1$ (unimodular) in zwei Dimensionen (also jedes Element der $SU(2)$) in der Form

$$U = \begin{pmatrix} a & b \\ -b^* & a^* \end{pmatrix} \qquad \text{mit} \qquad |a|^2 + |b|^2 = 1$$

geschrieben werden kann. Darin sind $a, b \in \mathcal{C}$ (Cayley-Klein Parameter).

(d) Überprüfen Sie dass sich die unitäre Matrix aus Teil (c) als

$$U_{ij} = \Big[\exp\big(-i\frac{\alpha}{2}\,\mathbf{n}.\boldsymbol{\sigma}\big)\Big]_{ij}$$

schreiben lässt, wo $\boldsymbol{\sigma}$ die Pauli Matrizen sind.