Übungen zur Quantentheorie

Prof. Dr. M. Klasen

Blatt 3

Abgabe: 03.11.2014
Besprechung: 06.11.2014

Aufgabe 7: $\Delta^+ \to N\pi$ Verzweigungsverhältnisse **(6 Punkte)**

Δ-Teilchen sind Baryonen, die wie das Proton und Neutron durch ihre Zusammensetzung aus u und d Quarks charakterisiert werden. Die wichtigsten Quantenzahlen für die Charakterisierung und Unterscheidung von den Nukleonen, sind das Quadrat des Isospins $\vec{I}^2$ und die z-Komponente des Isospins I_z. Eine wichtige Eigenschaft der starken Wechselwirkung ist die Erhaltung des Isospins. Isospinoperatoren genügen den Drehimpulsvertauschungsrelationen $[I_i, I_j] = i\varepsilon_{ijk}I_k$. Isospinsymmetrie bedeutet schließlich, dass Zustände ganz analog zur Rotationssymmetrie durch kets $|I, I_z\rangle$ charakterisiert werden.

Die Δ-Baryonen sind allesamt Teilchen im $I = \frac{3}{2}$ Quartett

$$|\Delta^{++}\rangle = |\tfrac{3}{2}, \tfrac{3}{2}\rangle \qquad |\Delta^{+}\rangle = |\tfrac{3}{2}, \tfrac{1}{2}\rangle \qquad |\Delta^{0}\rangle = |\tfrac{3}{2}, -\tfrac{1}{2}\rangle \qquad |\Delta^{-}\rangle = |\tfrac{3}{2}, -\tfrac{3}{2}\rangle$$

Das Δ^+ zerfällt praktisch zu 100% in ein Nukleon (Proton oder Neutron, Isospin $I = \frac{1}{2}$) und ein Pion (das leichteste Meson, $I = 1$). Es gilt im Detail

$$|\pi^{\pm}\rangle = |1, \pm 1\rangle, \qquad |\pi^{0}\rangle = |1, 0\rangle, \qquad |p\rangle = |\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\rangle, \qquad |n\rangle = |\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\rangle$$

Aufgrund der Ladungserhaltung sind nur diese beiden Zerfallskanäle

$$\Delta^+ \to p\,\pi^0 \qquad\qquad \Delta^+ \to n\,\pi^+$$

möglich. Berechnen Sie aufgrund der gegeben Analogie zur Drehimpulskopplung, in welchem Verhältnis die beiden Zerfälle auftauchen.

Aufgabe 8: Zwei Spins **(6 Punkte)**

Angenommen zwei Spin-1/2 Teilchen sind in einem Singletzustand ($S = 0$). Sei $S_a^{(1)}$ ein Operator der die Komponente des Spins von Teilchen 1 in einer Richtung gegeben durch einen Einheitsvektor $\vec{a}$ misst und analog sei $S_b^{(2)}$ ein Operator der die Komponente des Spins von Teilchen 2 in einer Richtung gegeben durch einen Einheitsvektor $\vec{b}$ misst. Zeigen Sie, dass

$$\langle S_a^{(1)}\, S_b^{(2)} \rangle = -\frac{\hbar^2}{4}\,\cos\theta\,,$$

wo θ ist der Winkel zwischen den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$.

Hinweis: Der Spin Operator in einer Richtung gegeben durch einen Vektor $\vec{n}$ ist

$$S_n = \vec{n}.\vec{S}\,.$$

Benutzen Sie die Operatoren $S_{\pm}^{(i)}$ statt $S_{x,y}^{(i)}$.

Aufgabe 9: Clebsch-Gordan Koeffizienten von Spin-$1/2$ Teilchen **(8 Punkte)**

Betrachten Sie die Clebsch-Gordan Koeffizienten für den Fall von einem Spin-1/2 Teilchen ($s_1 = \frac{1}{2}$) und einem Teilchen mit einem allgemeinen Spin s_2. Zeigen Sie, dass die Koeffizienten A und B

$$|s\, m\rangle = A\, |\tfrac{1}{2}\, \tfrac{1}{2}\rangle\, |s_2\, (m - \tfrac{1}{2})\rangle + B\, |\tfrac{1}{2}\, -\tfrac{1}{2}\rangle\, |s_2\, (m + \tfrac{1}{2})\rangle\,,$$

in allgemeinen gegeben sind durch

$$A = \sqrt{\frac{s_2 \pm m + 1/2}{2s_2 + 1}}\,, \qquad B = \pm\sqrt{\frac{s_2 \mp m + 1/2}{2s_2 + 1}}\,,$$

wo die Vorzeichen durch $s = s_2 \pm 1/2$ gegeben sind.

Hinweis: Benutzen Sie die Tatsache, dass der Vektor $|s\, m\rangle$ ein Eigenvektor von S^2 ist.