Übungen zur Quantentheorie

Prof. Dr. M. Klasen

Blatt 2

Abgabe: 27.10.2014
Besprechung: 30.10.2014

Aufgabe 4: Drehimpulse und Oszillatoren (8 Punkte)

Die fundamentalen Kommutationsrelationen vom Drehimpuls erlauben auch halbzahlige (und ganzzahlige) Eigenwerte. Bei Bahndrehimpuls sind nur ganzzahlige Eigenwerte erlaubt. Dieser Unterschied muss durch eine zusätzliche Bedingung verursacht sein die mit der spezifischen Form $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ zu tun hat.

Betrachten Sie zwei Sätze von Operatoren die wie folgt

$$\begin{aligned} q_1 &\equiv \frac{1}{\sqrt{2}}\Big[x + (a^2/\hbar)p_y\Big], \qquad p_1 \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}\Big[p_x - (\hbar/a^2)y\Big], \\ q_2 &\equiv \frac{1}{\sqrt{2}}\Big[x - (a^2/\hbar)p_y\Big], \qquad p_2 \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}\Big[p_x + (\hbar/a^2)y\Big], \end{aligned}$$

definiert sind, wo a eine beliebige Konstante mit einer Dimension der Länge ist.

a) Überprüfen Sie, dass $[q_1, q_2] = [p_1, p_2] = 0$ und $[q_1, p_1] = [q_2, p_2] = i\hbar$.

b) Zeigen Sie, dass

$$L_z = \frac{\hbar}{2a^2}(q_1^2 - q_2^2) + \frac{a^2}{2\hbar}(p_1^2 - p_2^2)$$

c) Überprüfen Sie, dass

$$L_z = H_1 - H_2$$

wo H_i sind beide Hamiltonoperatoren von harmonischen Oszillatoren mit einer Masse $m = \hbar/a^2$ und mit einer Frequenz $\omega = 1$.

d) Benutzen Sie die Ergebnisse aus 4c um zu argumentieren, dass die Eigenwerte von L_z ganzzahlig sein müssen.

Aufgabe 5: Parität der Kugelflächenfunktionen (6 Punkte)

Zeigen Sie, dass für die Kugelflächenfunktionen $Y_l^m(\theta, \varphi)$ die Beziehung

$$\Pi\, Y_l^m(\theta, \varphi) = (-1)^l\, Y_l^m(\theta, \varphi)$$

gilt, wobei Π der Paritätsoperator ist.

Hinweis: Der Paritätsoperator ist definiert durch

$$\Pi f(\vec{r}) = f(-\vec{r})$$

Aufgabe 6: Wellenfunktion des Wasserstoffatoms **(6 Punkte)**

Der Zustand eines Elektrons in einem Wasserstoffatom ist beschrieben durch eine kombinierte Spin- und Ortswellenfunktion als

$$\psi = R_{21}(r)\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\,Y_1^0\,\chi_+ + \sqrt{\frac{2}{3}}\,Y_1^1\,\chi_-\right)$$

wo $\chi_\pm$ 2-komponentige Spinoren sind die dem Spin $\pm\frac{\hbar}{2}$ in der z-Richtung entsprechen.

Wenn man das Gesamtdrehimpuls als $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$ definiert, welche Werte von J^2 kann man messen und mit welcher Wahrscheinlichkeit? Benutzen Sie dieses Mal die Clebsch-Gordan Koeffizienten und vergleichen Sie die Ergebnisse mit denen aus der Aufgabe 50 die im Sommersemmester 2014 gestellt worden ist.