Übungen zur Quantentheorie

Prof. Dr. M. Klasen

Blatt 12

Abgabe: 19.01.2015
Besprechung: 22.01.2015

Aufgabe 33: Quadratischer Zeeman-Effekt **(5 Punkte)**

Der quadratischer Term

$$H_Q = \frac{e^2 \vec{A}^2}{2m_e c^2} = \frac{e^2 B^2}{8 m_e c^2} \left(x^2 + y^2\right)$$

im Hamilton-Operator des Einelektronenatoms im homogenen Magnetfeld $\vec{B} = B\vec{e}_z$ wird normalerweise vernachlässigt. Berechnen Sie die Energiekorrektur durch H_Q für ein Wasserstoffatom im Grundzustand, $\langle \vec{x}|0\rangle = (\pi a_0^3)^{-1/2} \exp\big(-r/a_0\big)$. Die Energiekorrektur des Zeeman-Effekts ist proportional zu $E_Z = e\hbar B/(2m_e c)$. Zeigen Sie, dass der quadratische Zeeman-Effekt gegenüber dem linearen um $E_Z/(1\text{Ry})$ unterdrückt ist.

Aufgabe 34: Variationsrechnung für ein 2-Niveau-System **(8 Punkte)**

Angenommen wir haben ein System beschrieben durch einen Hamilton-Operator H_0 der nur zwei Eigenzustände ψ_a (mit einer Energie E_a) und ψ_b (mit einer Energie E_b) zulässt. Die Wellenfunktionen ψ_a und ψ_b sind orthogonal und normiert und $E_a \neq E_b$. Eine Störung H' wird eingeschaltet mit folgenden Matrixelementen

$$\langle \psi_a|H'|\psi_a\rangle = \langle \psi_b|H'|\psi_b\rangle = 0\,, \qquad \langle \psi_a|H'|\psi_b\rangle = \langle \psi_b|H'|\psi_a\rangle = h\,.$$

(a) Bestimmen Sie die exakten Eigenwerte des Hamilton-Operators.

(b) Berechnen Sie die Energien von dem vollen Hamilton-Operator in zweiter Ordnung Störungstheorie.

(c) Benutzen Sie die Variationsrechnung um eine obere Schranke auf die Grundzustandsenergie auszurechenen. Dabei verwenden Sie die Wellenfunktion

$$\psi = \cos\phi\,\psi_a + \sin\phi\,\psi_b$$

wo ϕ ist ein freier Parameter.

(d) Vergleichen Sie die Ergebnisse von (a), (b) und (c). Wieso ist die Variationsrechnung in diesem Fall so genau?

Aufgabe 35: Massive Photonen **(7 Punkte)**

In der Natur sind die Photonen (die Quanta des elektromagnetischen Feldes) masselos ($m_\gamma = 0$). Wenn die Photonen massiv wären, würde man den Coulombpotential ersetzen durch den Yukawapotential

$$V(\boldsymbol{r}) = -\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^{-\mu r}}{r}$$

wo $\mu = m_\gamma c/\hbar$. Benutzen Sie die Variationsrechnung um die Bindungsenergie des Wasserstoffatoms mit dem Yukawapotential zu bestimmen. Nehmen Sie an, dass $\mu a_0 \ll 1$ und geben Sie die Antwort bis zu Ordnung $(\mu a_0)^2$ an.