Übungen zur Quantentheorie

Prof. Dr. M. Klasen

Blatt 11

Abgabe: 12.01.2015
Besprechung: 15.01.2015

Aufgabe 30: Zeitabhängige Störungtheorie für ein 2-Niveau-System (8 Punkte)

Gegeben sei ein quantenmechanisches System mit zwei stationären Energieeigenzuständen $|1\rangle$ und $|2\rangle$. Die Differenz der zugehörigen Energieeigenwerte beträgt $E_2 - E_1 = \hbar\omega_{21}$. Zur Zeit $t = 0$, zu dem sich das System im Zustand $|1\rangle$ befinde, werde die zeitunabhängige kleine Störung H' mit den Matrixelementen

$$\langle 1|H'|1\rangle = 0, \qquad \langle 2|H'|1\rangle = \hbar\omega_0 \qquad \text{und} \qquad \langle 2|H'|2\rangle = -\hbar\omega_{21}$$

hinzugeschaltet.

(a) Berechnen Sie mit Hilfe der zeitabhängigen Störungstheorie erster Ordnung die Wahrscheinlichkeit, das System nach der Zeit t im Zustand $|1\rangle$ bzw. im Zustand $|2\rangle$ vorzufinden. Dabei soll $\omega_{21}t \ll 1$ und $\omega_0 t \ll 1$ gelten.

(b) Lösen Sie die Schrödinger-Gleichung exakt, indem Sie den Hamilton-Operator des obigen Problems diagonalisieren. Finden Sie $|\psi(t)\rangle$.

(c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, das System zu einer beliebigen Zeit $t > 0$ im Zustand $|2\rangle$ anzutreffen? Unter welcher Bedingung löst die in a) verwendete erste Ordnung der Störungsrechnung das Problem hinreichend gut? Zu welcher Zeit befindet sich das System mit Wahrscheinlichkeit 1 im Zustand $|2\rangle$?

Aufgabe 31: Wasserstoff-Atom mit zeitabhängigem elektrischen Feld (7 Punkte)

Ein Wasserstoff-Atom befinde sich in einem zeitabhängigen elektrischen Feld der Form

$$E(t) = \frac{B\tau}{e\pi}\frac{1}{\tau^2 + t^2},$$

wobei B und τ Kostanten sind. Wenn sich das Atom bei $t = -\infty$ in seinem Grundzustand befindet, wie groß ist dann die Wahrscheinlichkeit dafür, dass es sich bei $t = \infty$ in einem $2p$-Zustand befindet?

Hinweis: Legen Sie das elektrische Feld in z-Richtung und verwenden Sie zum Lösen des Integrals $\int \mathrm{d}t \ldots$ den Residuensatz.

Aufgabe 32: Abschätzung der Grundzustandsenergie (5 Punkte)

Benutzen Sie die Variationsrechnung um eine obere Grenze auf die Grundzustandsenergie des Wasserstoffatoms zu setzen. Verwenden Sie dabei eine Wellenfunktion

$$\psi(\boldsymbol{r}) = Ae^{-br^2}$$

wo A ist die Normierungskonstante und b ist ein freier Parameter.