Übungen zur Quantentheorie

Prof. Dr. M. Klasen

Blatt 10

Abgabe: 05.01.2015
Besprechung: 08.01.2015

Aufgabe 27: Relativistische Korrekturen des Wasserstoffspektrums **(9 Punkte)**

Der Hamiltonoperator des Wasserstoffatoms kann als

$$H = H_0 + H_{LS} + H_r + H_D$$

geschrieben werden. Darin ist $H_0 = \vec{p}^{\,2}/2m + V(r)$. Die restlichen Terme werden als Störung zu H_0 betrachtet und lauten

$$\begin{aligned} H_{LS} &= \frac{1}{2m^2c^2}\frac{1}{r}\frac{dV(r)}{dr}\,\vec{S}.\vec{L}\,, \\ H_r &= -\frac{1}{2mc^2}\left(\frac{\vec{p}^{\,2}}{2m}\right)^2, \\ H_D &= \frac{\hbar^2}{8m^2c^2}\vec{\nabla}^2 V(r)\,, \end{aligned}$$

wobei $V(r) = -e^2/(4\pi\epsilon_0 r)$.

(a) Zeigen Sie, dass der Gesamtdrehimpuls $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$ erhalten ist.

(b) Zeigen Sie, dass der Darwin-Term nur Korrekturen zu s-Zuständen liefert.

(c) Bestimmen Sie die Korrektur zum reinen CoulombEnergieniveau

$$E_n^{(0)} = -\frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 a_0}\frac{1}{n^2} = -13.6\,\mathrm{eV}\frac{1}{n^2}$$

durch den Darwin-Term.

Aufgabe 28: Die Korrekturen durch H_{LS} und H_r **(6 Punkte)**

(Fortsetzung von Aufgabe 27)

(a) Berechnen Sie die Energiekorrekturen durch die beiden verbleibenden Störungen H_{LS} sowie H_r.

(b) Bestimmen Sie die Summe der drei Störterme und zeigen Sie, dass die Energieniveaus des Wasserstoffatoms als

$$E_{nj}^{(1)} = E_n^{(0)}\left[1 + \frac{\alpha^2}{n}\big(\delta_{LS} + \delta_r + \delta_D\big)\right] = E_n^{(0)}\left[1 + \frac{\alpha^2}{n}\left(\frac{1}{j+\frac{1}{2}} - \frac{3}{4n}\right)\right]$$

geschrieben werden können. Berechnen Sie die Beiträge $\delta_{LS}, \delta_r, \delta_D$ der verschiedenen Störungen und deren Summe für $n \leq 3$ explizit und skizzieren Sie das resultierende Termschema.

Aufgabe 29: Tritium-Helium-Übergang **(5 Punkte)**

Das Elektron eines Tritium Atoms (^{3}H) befinde sich im Grundzustand. Durch β-Zerfall erhöht sich die Ladung des Kerns plötzlich auf $Z = 2$ und wir bekommen ein geladenes ^{3}He-Atom. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich das Elektron nach dem Zerfall immer noch im Grundzustand befindet. Die Wellenfunktion des Einelektronatoms lautet

$$\psi_{000} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{Z}{a_0} \right)^{3/2} e^{-Zr/a_0}$$