Übungen zur Quantentheorie

Prof. Dr. M. Klasen

Blatt 1

Abgabe: 20.10.2014
Besprechung: 23.10.2014

Aufgabe 1: Wasserstoff-Zustände mit maximalem Drehimpuls **(8 Punkte)**

a) Benutzen Sie die Rekursionsgleichung für die Koeffizienten a_k der zugeordneten Laguerre-Polynome um zu zeigen, dass im Fall $l = n-1$ die Radialfunktion die folgende Form annimmt

$$f_{n,n-1}(r) = N_n\, r^{n-1}\, \mathrm{e}^{-r/na}\,,$$

und bestimmen Sie die Normierungskonstante N_n durch direkte Integration.

b) Berechnen Sie $\langle r \rangle$ und $\langle r^2 \rangle$ für Zustände mit $l = n - 1$.

c) Berechnen Sie $\Delta r / \langle r \rangle$ für solche Zustände. Vergleichen Sie das Ergebnis für große n mit dem Bohr'schen Atommodell und kommentieren Sie den Vergleich.

Hinweis: Die Rekursiongleichung für Laguerre-Polynome ist

$$c_{j+1} = \frac{2(j+l+1-n)}{(j+1)(j+2l+2)}\, c_j$$

Aufgabe 2: Spin in beliebigen Richtungen **(4 Punkte)**

Es sei $\vec{n}$ ein Vektor der Länge $|\vec{n}| = 1$. Die Komponente des Spins in Richtung $\vec{n}$ ist definiert durch $S = \vec{n} \cdot \vec{S}$.

a) Schreiben Sie $\vec{n}$ in Kugelkoordinaten und berechnen Sie den Erwartungswert von S im Zustand $|+\rangle$.

b) Schreiben Sie S unter Verwendung der Polarkoordinaten von $\vec{n}$ explizit als 2×2-Matrix auf und zeigen Sie $S^2 = \frac{\hbar^2}{4}\,\mathbf{1}$.

c) Welche Eigenwerte besitzt S? Finden Sie die zugehrigen Eigenzustnde $\xi^{(+)}$ und $\xi^{(-)}$.

Aufgabe 3: Clebsch-Gordan Koeffizienten **(8 Punkte)**

Ein System sei aus zwei Spin-1 Systemen zusammengesetzt. Wie lauten die Eigenzustände des Gesamtdrehimpulses ($|jm\rangle$) ausgedrückt als Linearkombinationen der gekoppelten $|1m_1\rangle|1m_2\rangle$ -Zustände? Mit anderen Worten: bestimmen Sie die Clebsch-Gordan Koeffizienten für $1 \otimes 1 = 0 \oplus 1 \oplus 2$.