Übungen zur Atom- und Quantenphysik

Prof. Dr. M. Klasen, Prof. Dr. H. Zacharias

Blatt 9

Abgabe: 19.06.2014
Besprechung: 24.06.2014

Aufgabe 38: Elektron im Potenzialtopf (8 Punkte)

Betrachten Sie ein Potenzial V, das für $|x| > a$ unendlich groß ist und für $-a \leq x \leq a$ verschwindet. Die Elektron-Wellenfunktion $\psi(x)$ muss dann für $|x| \geq a$ verschwinden; insbesondere ist also $\psi(-a) = \psi(a) = 0$.

(a) Bestimmen Sie aus dem Hamiltonoperator $H = \frac{p^2}{2m} + V$ die Energie-Eigenwerte E_n und die zugehörigen normierten Eigenfunktionen $\psi_n(x)$ in der Ortsdarstellung. Dazu müssen Sie die Gleichung

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + V(x)\right)\psi_n(x) = E_n\psi_n(x)$$

unter Beachtung der Randbedingung $\psi_n(-a) = \psi_n(a) = 0$ lösen.

(b) Prüfen Sie explizit nach, ob die Orthonormalitätsbedingung

$$\int_{-a}^{a} dx\ \psi_k^*(x)\,\psi_l(x) = \delta_{kl}$$

erfüllt ist.

(c) Berechnen Sie $\langle X\rangle$ und die Ortsunschärfe ΔX für alle ψ_n.

(d) Beweisen Sie, dass der Impulsoperator P hermitesch ist, indem Sie zeigen, dass $\langle\chi|P\psi\rangle = \langle P\chi|\psi\rangle$ für alle $|\psi\rangle$ erfüllt ist, die die Randbedingung $\psi(-a) = \psi(a) = 0$ erfüllen.

(e) Berechnen Sie $\langle P\rangle$ und die Impulsunschärfe ΔP für alle ψ_n. Geben Sie auch die Unschärfeprodukte $(\Delta X)(\Delta P)$ an.

(f) Zeigen Sie, dass P überhaupt keine Eigenfunktionen hat, die $\psi(-a) = \psi(a) = 0$ erfüllen, obwohl P hermitesch ist! Welche mathematische Ursache hat das? Welchen physikalischen Grund hat die Abwesenheit von Impulseigenfunktionen?

Hinweis: Leiten Sie aus der Heisenbergschen Unschärferelation eine untere Grenze an ΔP ab.

Aufgabe 39: Teilchen in δ-Potenzial (7 Punkte)

Betrachten Sie den Hamilton-Operator eines Teilchens der Masse m in einem Potential $V(x) = -a\delta(x)$ mit $a > 0$

$$H = \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} - a\delta(x)\right)$$

Die Eigenwert-Gleichung

$$H\psi(x) = E\psi(x)$$

bestimmt die möglichen Bindungsenergien E des Teilchens. Dabei muß ψ eine stetige, quadratintegrable und fast überall differenzierbare Funktion sein.

(a) Zeigen Sie, dass die Ableitung $\psi'(x)$ die Sprungbedingung

$$\lim_{x\to 0^-}\psi'(x)-\lim_{x\to 0^+}\psi'(x)=\frac{2ma}{\hbar^2}\psi(0)$$

erfüllen muss, indem Sie Eigenwert-Gleichung von ε bis ε (mit $\varepsilon > 0$) integrieren und dann ε gegen 0 gehen lassen.

(b) Lösen Sie die Eigenwertgleichung stückweise. Definieren Sie dazu

$$\psi(x)=\begin{cases}\psi_- & \text{für} \quad x<0\\ \psi_+ & \text{für} \quad x>0\end{cases}$$

und bestimmen Sie ψ und ψ_+ für beliebige $E\in\mathbb{R}$. Für welche Werte von E kann es quadratintegrable Lösungen geben?

(c) Bestimmen Sie mit Hilfe Ihres Ergebnisses aus (a) die möglichen Eigenwerte E. Wie viele Eigenwerte gibt es?

(d) Geben Sie zu jedem Eigenwert E eine normierte Eigenfunktion ψ_E an.

(e) Bestimmen Sie Erwartungswert und Unschärfe des Ortsoperators und des Impulsoperators für alle ψ_E.
Hinweis: $\frac{d}{dx}\frac{x}{|x|}=2\delta(x)$

(f) Berechnen Sie für jeden Energieeigenwert E die Wahrscheinlichkeit dafür, ein Teilchen im Zustand $|\psi_E\rangle$ im Intervall $[-\frac{\hbar^2}{am},+\frac{\hbar^2}{am}]$ anzutreffen.

Aufgabe 40: Streuung auf einer δ-Barriere **(5 Punkte)**

Gegeben sei das Potential $V(x)=a\delta(x)$ mit der δ-Funktion und einer reellen Konstante a.

(a) Gegeben Sie die zugehörige Schrödingergleichung in der Ortsdarstellung an. Wie lauten die Anschlußbedingungen bei $x=0$?

(b) Zu beliebig vorgegebener Energie $E>0$ existieren (nicht normierbare) Lösungen der Form

$$\psi(x)=\begin{cases}A\,e^{ikx}+B\,e^{-ikx} & \text{für} \quad x<0\\ C\,e^{ikx} & \text{für} \quad x>0\end{cases}$$

mit $k>0$. Verifizieren Sie dies! Wie hängt die Wellenzahl k mit der Energie zusammen und wie drücken sich B und C durch A aus?

(c) Berechnen Sie für die Lösung $\psi(x)$ aus (b) den Reflexionskoeffizienten $R=\left|\frac{B}{A}\right|^2$ und den Transmissionskoeffizienten $T=\left|\frac{C}{A}\right|^2$ und verifizieren Sie die Beziehung $R+T=1$.

Aufgabe 41: Hyperfeinstruktur des Wasserstoffatoms **(5 Punkte)**

Berechnen Sie die Aufspaltung der Balmer-α Linie von Wasserstoff im Übergang $2s\ ^2S_{1/2}\to 3p^2P_{3/2}$ im Magnetfeld. Benutzen Sie die abgeleiteten Ausdrücke für die Energieverschiebung von HFS-Niveaus für $l=0$ und für $l>0$. Geben Sie die HFS-Aufspaltung der Zustände und der Spektrallinien

(a) ohne Magnetfeld und

(b) für eine Magnetfeldstärke von $B=1T$ an.

Vernachlässigen Sie dabei die den Beitrag des Kern-Zeeman-Effektes zum g_j Faktor.