Übungen zur Atom- und Quantenphysik

Prof. Dr. M. Klasen, Prof. Dr. H. Zacharias

Blatt 8

Abgabe: 05.06.2014
Besprechung: 17.06.2014

Aufgabe 35: Harmonischer Oszillator (7 Punkte)

Betrachten Sie einen quantenmechanischen harmonischen Oszillator. Sein Grundzustand ist beschrieben durch eine Wellenfunktion

$$\psi_0(x) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}$$

a) Benutzen Sie den Aufsteigeoperator a^+ um die Wellenfunktion $\psi_1(x)$ von dem ersten angeregtem Zustand zu bestimmen. Der Operator a^+ ist definiert als

$$a^+ = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\,\hat{x} - \frac{i}{\sqrt{2\hbar m\omega}}\,\hat{p}$$

Vergessen Sie nicht die neue Wellenfunktion zu normieren!

b) Die Energieeigenwerte von dem harmonischen Oszillator sind gegeben durch $E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega$. Benutzen Sie diese Information und die Ergebnisse von Teil a) um eine zeitabhängige Wellenfunktion $\psi(x,t)$ zu bestimmen die bei $t = 0$ eine Überlagerung von den zwei Zuständen ψ_0 und ψ_1 ist

$$\psi(x,0) = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(\psi_0(x) + \psi_1(x)\Big)$$

c) Berechnen Sie den Ortsmittelwert

$$\langle\psi|x|\psi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx\ x\ \psi(x,t)\psi^*(x,t)$$

in dem Zustand gegeben durch die Wellenfunktion $\psi(x,t)$ aus Teil b). Zeigen Sie, dass dieser Mittelwert genau wie die klassische Lösung des harmonischen Oszillators mit einer Frequenz ω schwingt.

d) Welchen Mittelwert der Energie würden wir in dem Zustand $\psi(x,t)$ messen?

Aufgabe 36: Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren (5 Punkte)

Betrachten Sie den eindimensionalen harmonischen Oszillator mit dem HamiltonOperator

$$H = \frac{1}{2m}p^2 + \frac{m\omega^2}{2}x^2, \qquad [p,x] = -i\hbar$$

Zum Übergang in die Energiedarstellung definiert man zweckmäßig die Erzeugungs und Ver- nichtungsoperatoren $a^\dagger$ und a als

$$a = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\,\hat{x} + \frac{i}{\sqrt{2\hbar m\omega}}\,\hat{p} \qquad a^+ = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\,\hat{x} - \frac{i}{\sqrt{2\hbar m\omega}}\,\hat{p}$$

(a) Berechnen Sie den Kommutator $[a, a^\dagger]$

(b) Drücken Sie H, x und p durch a, $a^\dagger$ sowie $N = a^\dagger a$ aus.

(c) Angewandt auf Energieeigenzustände $|n\rangle$ wirken $a^\dagger$, a als Erzeugungs und Vernichtungsoperatoren, weil $a^\dagger|n\rangle = c'|n+1\rangle$ und $a|n\rangle = c|n-1\rangle$. Bestimmen Sie die beiden Konstanten c und c.

Aufgabe 37: Kohärente Zustände I **(8 Punkte)**

Betrachten Sie den eindimensionalen harmonischen Oszillator aus der Aufgabe 36. Kohärente Zustände $|\lambda\rangle$ sind Eigenzustände des Vernichtungsoperators

$$a|\lambda\rangle = \lambda|\lambda\rangle \qquad \text{mit} \qquad \lambda \in \mathbb{C}$$

(a) Zeigen Sie mit Hilfe des Ansatzes $|\lambda\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} c_n|n\rangle$ dass die Eigenvektoren die folgende Form annehmen

$$|\lambda\rangle = N_\lambda e^{\lambda a^\dagger}|0\rangle$$

Gibt es analoge Eigenzustände zum Erzeugungsoperator $a^\dagger$?

(b) Bestimmen Sie N_λ aus der Normierungsbedingung $\langle\lambda|\lambda\rangle = 1$.
Hinweis: Betrachten Sie $1 = \langle\lambda|\lambda\rangle = N_\lambda^*\langle 0|e^{\lambda^* a}|\lambda\rangle$.

(c) Berechnen Sie die Orts- und Impulsmittelwerte $\langle X\rangle$, $\langle P\rangle$ so wie ΔX und ΔP im Zustand $|\lambda\rangle$.
Hinweis: Drücken Sie dazu die Operatoren X und P durch a und $a^\dagger$ aus.

(d) Entwickeln Sie $|\lambda\rangle$ nach Energie-Eigenkets $|n\rangle$, also $|\lambda\rangle = \sum_{n=0}^{\infty}|n\rangle\langle n|\lambda\rangle$. Es sei $P_n(\lambda)$ die Wahrscheinlichkeit, die Energie $E_n = \hbar\omega(n+1/2)$ im Zustand $|\lambda\rangle$ zu messen. Zeigen Sie, dass

$$P_n(\lambda) = \frac{(|\lambda|^2)^n}{n!}\, e^{-|\lambda|^2}$$

die Poissonverteilung ist. Welcher Messwert $\hat{E}$ ist der Wahrscheinlichste? Berechnen Sie den Erwartungswert $\langle\lambda|H|\lambda\rangle$. Ist er größer oder kleiner als $\hat{E}$?
Hinweis: Zur Bestimmung des Maximums der Poissonverteilung betrachten Sie das Verhältnis $P_{n+1}(\lambda)/P_n(\lambda)$