

Übungen zur Atom- und Quantenphysik

Prof. Dr. M. Klasen, Prof. Dr. H. Zacharias

Blatt 6

Abgabe: 22.05.2014
Besprechung: 27.05.2014

Aufgabe 27: Kommutatoren der Orts- und Impulsoperatoren (6 Punkte)

Unter Benutzung der Heisenberg'schen Vertauschungsrelationen für den Orts- und Impulsoperator X und P , berechnen Sie die folgende Kommutatoren

- (a) $[X^n, P]$
- (b) $[f(X), P]$
- (c) $[f(X), X]$

wo die Funktion $f(X)$ in eine Potenzreihe entwickelt werden sollte.

Aufgabe 28: Fourier-Transformation der δ -Funktion (5 Punkte)

Die Fourier-Darstellung einer Funktion $f(t)$ ist definiert durch

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

die Fourier-Transformierte $g(\omega)$ von $f(t)$ ist gegeben durch

$$g(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt$$

Wie lautet die Fourier-Transformierte der δ -Funktion? Leiten Sie mit Hilfe der Fourier-Transformation folgende Darstellung für die δ -Funktion

$$\delta(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\sin(Nx)}{\pi x}$$

Aufgabe 29: Wellenpakete und Breiten (9 Punkte)

Das Wellenpaket $\psi(x) = \int \frac{dk}{2\pi} \varphi(k) e^{ikx}$ ist gegeben durch

$$\text{i) } \varphi(k) = \begin{cases} A_1, & \text{fr } k_0 - \alpha \leq k \leq k_0 + \alpha \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \quad \text{ii) } \varphi(k) = \begin{cases} A_2(\alpha - |k|), & \text{fr } |k| \leq \alpha \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Für beide Fälle,

- (a) berechnen Sie jeweils $\psi(x)$.
- (b) Bestimmen Sie die Konstanten A_i aus der Normierungsbedingung im Orts- oder Impulsraum.

- (c) Definieren Sie im Fall (i) geeignete Maße Δk und Δx für die Breite im k - und x -Raum (zum Beispiel die Halbwertsbreite, die Breite bei 1/e-tel des Maximalwertes, ...) und berechnen Sie $\Delta x \cdot \Delta k$.
- (d) Berechnen Sie für den Fall (ii):
 $\langle x \rangle, \langle x^2 \rangle, \langle k \rangle, \langle k^2 \rangle, \Delta x = \sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2}, \Delta k = \sqrt{\langle k^2 \rangle - \langle k \rangle^2}$ und $\Delta x \cdot \Delta k$.
Hinweis: $\int_0^\infty \frac{\sin^4 x}{x^2} dx = \frac{\pi}{4}$.

Aufgabe 30: Abstand des Elektrons im Wasserstoffatom **(10 Punkte)**

Berechnen Sie den Erwartungswert $\langle r_{nl} \rangle = \int \psi^* r \psi d^3r$ für den Abstand des Elektrons im Wasserstoffatom und in wasserstoffähnlichen Ionen.

- (a) Vergleichen Sie diesen Wert für das $1s$ Elektron von H und U^{91+} .
- (b) Vergleichen Sie für H -Atome die Werte von $n = 1$ und von $n = l + 1 = 100$.