Übungen zur Atom- und Quantenphysik

Prof. Dr. M. Klasen, Prof. Dr. H. Zacharias

Blatt 4

Abgabe: 08.05.2014
Besprechung: 13.05.2014

Aufgabe 18: Unitäre Transformationen (6 Punkte)

Zeigen Sie dass eine Transformation zwischen zwei orthonormalen Basen unitär ist d.h. für $|b_i\rangle = U_{ij}|a_j\rangle$ und $\langle a_i|a_j\rangle = \delta_{ij}$, zeigen Sie dass

(i) $U^\dagger U = 1 \Rightarrow \langle b_i|b_j\rangle = \delta_{ij}$ (ii) $\langle b_i|b_j\rangle = \delta_{ij} \Rightarrow U^\dagger U = 1$

Aufgabe 19: Operator $A^\dagger A$ (4 Punkte)

Sei A ein linearer Operator und $A^\dagger$ sein Adjungiertes, beide definiert auf ganz $\mathcal{H}$. Zeigen Sie:

(a) der Operator $A^\dagger A$ ist selbstadjungiert,

(b) der Operator $A^\dagger A$ ist positiv-semidefinit, d.h. er besitzt nur nichtnegative Erwartungswerte.

Aufgabe 20: Normen und Skalarprodukte (4 Punkte)

(a) Werten Sie ein Skalarprodukt $\langle\psi_1|\psi_2\rangle$ aus, bei dem die Vektoren als

$$|\psi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}|+\rangle + i\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}|-\rangle \qquad |\psi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{5}}|+\rangle - \frac{2}{\sqrt{5}}|-\rangle$$

gegeben sind.

(b) Beweisen Sie die Schwarz'sche Ungleichung

$$|\langle\phi|\psi\rangle| \leq \|\phi\| \cdot \|\psi\|\,,$$

wo die Norm als $\|\psi\| = +\sqrt{\langle\psi|\psi\rangle}$ definiert ist.
Hinweis: Zerlegen Sie ψ in Komponenten parallel und senkrecht zu ϕ.

Aufgabe 21: Legendre Polynome (6 Punkte)

In einem Funktionenraum auf einen Interval $(-1,1)$, kann man ein Skalarprodukt wie folgt einführen:

$$\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\, dx$$

Jede Funktion auf dem Interval $(-1,1)$ kann in eine Basis aus Polynomen

$$\mathbf{u} = \{1, x, x^2, x^3, \ldots\} \qquad \text{oder} \qquad \mathbf{u}_n = x^n \quad \text{für} \quad n \geq 0$$

entwickelt werden. Benutzen Sie das Gram-Schmidt Verfahren um eine neue orthonormale Basis $\mathbf{e}_n$ aus der oben gennanten Basis zu konstruieren. Zeigen Sie explizit für $n = 0, 1, 2, 3$, dass die neue Basis aus Legendre Polynomen besteht

$$\mathbf{e}_n = \sqrt{\frac{2n+1}{2}} P_n(x) \qquad n = 0, 1, 2, \ldots.$$

Die Legendre Polynomen sind definiert als

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n \qquad \text{für } n \geq 1 \quad \text{und} \quad P_0(x) = 1\,.$$

Die Legendre Polynomen sind die Lösungen der Differentialgleichung

$$\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{d}{dx}P(x)\right] + n(n+1)P(x) = 0\,.$$

Hinweis: Das Gram-Schmidt Verfahren nimmt eine beliebige Basis $\mathbf{u}_n$ und konstruiert eine orthogonale/orthonormale Basis $\mathbf{v}_n/\mathbf{e}_n$ als

$$\mathbf{v}_{n+1} = \mathbf{u}_{n+1} - \sum_{k=0}^{n} \langle \mathbf{u}_{n+1}, \mathbf{e}_k\rangle \mathbf{e}_k \qquad\qquad \mathbf{e}_{n+1} = \frac{\mathbf{v}_{n+1}}{||\mathbf{v}_{n+1}||}$$

mit $\mathbf{e}_0 = \mathbf{u}_0/||\mathbf{u}_0||$.

Aufgabe 22: Übergangsenergien (10 Punkte)

Berechnen Sie die Übergangsenergien der Lyman-α und Balmer-β Linien von Deuterium. Geben Sie die Energiedifferenz dieser Isotopieverschiebung zu entsprechenden Übergang im Wasserstoff an. Erläutern Sie kurz den physikalischen Grund hierfür. Benutzen Sie aktuelle Massenwerte und rechnen Sie in den Einheiten $[cm^{-1}]$ bis zur sechsten Stelle nach dem Komma. Geben Sie auch die Übergangswellenlängen der Spektrallinien an.