Pfadintegraldarstellung des freien Dirac-Feldes

Seminar zur Theorie der Teilchen und Felder

Kevin Mitas

20. Januar 2016

1 Einleitung

Aus den vorherigen Vorträgen ist die Pfadintegraldarstellung bekannt. Um das Pfadintegral des freien Skalaren-Feldes darzustellen, wird die Klein-Gordon-Gleichung benutzt. Für die Pfadintegraldarstellung des Dirac-Feldes wird als Ausgangspunkt die Dirac-Gleichung verwendet. Kenntnis und Herleitung dieser Gleichung wird vorausgesetzt und können in [MSred16] oder [LRyd96] nachgeschlagen werden. Das Dirac-Feld kann nur durch anti-kommutierende Erzeuger- und Vernichteroperatoren beschrieben werden und lässt sich somit durch herkömmlichen Zahlen nicht lösen. Zur Lösung des Problems werden die Grassman-Zahlen eingeführt, die exakt die anti-kommutierende Eigenschaft besitzen. Weiterhin wird am Ende der Feynman-Propagator für das Dirac-Feld hergeleitet und mit dem bereits bekannten Propagator des freien Skalar-Feldes verglichen. In der gesamten Ausarbeitung ist die Notation $\quad \hbar = c = 1 \quad$ verwendet worden.
Weiterhin entsprechen die verwendeten Darstellungen denen Lehrbücher [MSred16] und [LRyd96] zur der Quantenfeldtheorie.

2 Dirac-Gleichung

Voraussetzung der Pfadintegraldarstellung des freien Dirac-Feldes ist die Dirac-Gleichung mit

$$\boxed{(\mathrm{i}\gamma^\mu \partial_\mu - m)\Psi = 0\,.} \tag{1}$$

Gleichung (1) wird durch die übliche Notation $\quad \gamma^\mu \partial_\mu = \not{\partial} \quad$ vereinfacht zu

$$(\mathrm{i}\not{\partial} - m)\Psi = 0\,. \tag{2}$$

Die Lagrange-Dichte der Dirac-Gleichung lässt sich direkt ablesen. Äquivalent zum Skalaren-Feld ergibt sich

$$\mathcal{L} = \bar{\Psi}(\mathrm{i}\not{\partial} - m)\Psi\,. \tag{3}$$

Um die Einteilchen-Wellenfunktionen auf Felder zu erweitern, wird die kanonische Quantisierung durchgeführt. Dabei werden die Wellenfunktionen, die durch Ψ beschrieben werden, bei der Quantisierung als Feldoperatoren aufgefasst. Weiterhin wird von klassischen Feldern ausgegangen.
Da die fermionischen Erzeuger und Vernichter einen anti-kommutierenden Charakter besitzen, kann das freie Dirac-Feld nicht durch Objekte vergleichbar mit gewöhnlichen kommutierenden Zahlen dargestellt werden.

3 Grassmann-Zahlen

Die Grassmann-Zahlen besitzen gerade die Eigenschaft, die die fermionischen Erzeuger und Vernichter des Dirac-Feldes voraussetzen. Zunächst werden einige Relationen der Grassmann-Zahlen aufgelistet:

- Antikommutator zweier Grassmann-Zahlen

$$\Theta\eta + \eta\Theta = 0 \quad \Rightarrow \Theta^2 = \eta^2 = 0 \tag{4}$$

- Produkt zweier Grassmannzahlen

$$(\Theta_1\eta_1) \cdot (\Theta_2\eta_2) = -\Theta_1\Theta_2\eta_1\eta_2 = (\Theta_2\eta_2) \cdot (\Theta_1\eta_1) \tag{5}$$

- Multiplikation und Addition mit reellen Zahlen

$$a(\Theta + b\eta) = a\Theta + ab\eta \tag{6}$$

- Komplex Konjugation

$$(\Theta\eta)^* = \eta^*\Theta^* = -\Theta^*\eta^* \tag{7}$$

Weiterhin lässt sich eine Taylor-Entwicklung von grassmannwertigen Funktionen bilden:

$$f(\eta) = f_0 + f_1\eta \tag{8}$$
$$f(\eta_1, \eta_2) = f_{00} + f_{10}\eta_1 + f_{01}\eta_2 + f_{11}\eta_1\eta_2\,. \tag{9}$$

Dadurch wird ersichtlich, dass diese Funktionen nur linear sein können, aufgrund der anti-kommutierenden Eigenschaft (4). Die Integration der Grassmann-Zahlen folgt über das sogenannte Berezin-Integral:

$$\int \mathrm{d}\eta = 0 \tag{10}$$
$$\int \mathrm{d}\eta\eta = 1 \tag{11}$$
$$\int \mathrm{d}\eta(\eta + \Theta) = \int \mathrm{d}\eta\eta - \Theta \int \mathrm{d}\eta = \int \mathrm{d}\eta\eta - \Theta \cdot 0 = 1\,. \tag{12}$$

Daraus ergibt sich für ein Gaußintegral mit Grassmann-Zahlen

$$\begin{aligned}\int \mathrm{d}\eta \int \mathrm{d}\bar{\eta}\mathrm{e}^{\bar{\eta}a\eta} &= \int \mathrm{d}\eta \int \mathrm{d}\bar{\eta}(1 + \bar{\eta}a\eta)\\ &= \int \mathrm{d}\eta \left[\int \mathrm{d}\eta \cdot 1 + \int \mathrm{d}\bar{\eta}\bar{\eta}a\eta\right]\\ &= \int \mathrm{d}\eta \left[0 + a\eta \cdot \int \mathrm{d}\bar{\eta}\bar{\eta}\right]\\ &= \int \mathrm{d}\eta a\eta = a \int \mathrm{d}\eta\eta = \mathrm{e}^{\ln a} = a\,. \end{aligned} \tag{13}$$

Weiterhin wird die Auswirkung, die die Transformation auf ein Maß eines Pfadintegral durch Grassmann-Zahlen hat, berechnet:

$$\mathcal{D}\eta = \prod_{i=1}^{N} \eta_i = \frac{1}{N!}\epsilon^{i_1 \ldots i_N}\eta_{i_1}\ldots\eta_{i_N}U_{i_1 j_1'}\ldots U_{i_N j_N'}\,. \tag{14}$$

Daraufhin wird eine unitäre Transformation durchgeführt mit

$$\eta_i \to \eta_i' = \sum_j U_{ij}\eta_j \quad \text{mit} \quad UU^\dagger = \mathbb{1}\,. \tag{15}$$

Es folgt

$$\prod_{i=1}^{N} \eta_i' = \underbrace{\frac{1}{N!}\epsilon^{i_1\dots i_N} U_{i_1 j_1'}\dots U_{i_N j_N'}}_{=\det U} \eta_{i_1'}\dots\eta_{i_N'} \tag{16}$$

$$= \det U \prod_{i=1}^{N} \eta_i\,. \tag{17}$$

Zusätzlich wurde verwendet, dass

$$\eta_{i_1'}\dots\eta_{i_N'} = \epsilon^{i_1\dots i_N}\cdot A \quad \text{mit} \quad A = \prod_{i=1}^{N}\eta_i \tag{18}$$

gilt. Damit ist gezeigt, dass das Maß invariant bzgl. unitären Transformationen ist. Durch diesen Ansatz kann eine hermitisch und reelle Matrix B berechnet werden.

$$\prod_i \int \mathrm{d}\bar{\eta}_i \mathrm{d}\eta_i \exp\left(-\sum_{kj}\bar{\eta}_k B \eta_j\right) \tag{19}$$

Da die Matrix B reell als auch hermitisch ist, kann diese mithilfe der unitären Transformation $\quad U^{-1}DU \quad$ diagonalisiert werden, sodass folgt

$$= \prod_i \int \mathrm{d}\bar{\eta}_i \mathrm{d}\eta_i \exp\left(-\sum_{krjl}\bar{\eta}_k U_{kr}^{-1} D_{rj} U_j l \eta_l\right) \tag{20}$$

$$= \prod_i \int \mathrm{d}\bar{\eta}_i' \mathrm{d}\eta_i' \det U^{-1} \det U \exp\left(-\sum_{krjl}\bar{\eta}_k' D_{rj} \eta_l'\right) \tag{21}$$

$$= \prod_i \int \mathrm{d}\bar{\eta}_i' \mathrm{d}\eta_i' \exp\left(-\sum_{krjl}\bar{\eta}_k' b_j \eta_l'\right)\,. \tag{22}$$

Im letzten Schritt wurde $\quad D_{ij} = 0 \quad \forall \quad i \neq j \quad \Rightarrow \quad D_{rj} = b_j \delta_{rj} \quad$ benutzt. Es ergibt sich

$$= \prod_i b_i = \det B\,. \tag{23}$$

Zusammenfassend wurde gefunden:

$$\int \prod_i \mathrm{d}\bar{\eta}_i \mathrm{d}\eta_i \exp\left(-\sum_{kj}\bar{\eta}_k B_{kj} \eta_j\right) = \det B\,. \tag{24}$$

Zusätzlich für weitere Vorgehensweisen kann

$$\int \prod_i \mathrm{d}\bar{\eta}_i \mathrm{d}\eta_i \eta_n \bar{\eta}_l \exp\left(-\sum_{kj} \bar{\eta}_k B_{kj} \eta_j\right) = B^{-1}_{nl} \mathrm{det} B \tag{25}$$

analog bestimmt werden. Dabei muss nur die Relation

$$\eta_n \bar{\eta}_l = -\frac{\partial}{\partial \bar{\Theta}_n} \frac{\partial}{\partial \Theta_l} \exp\left(\sum_l \bar{\eta}_l \Theta_l + \sum_n \bar{\Theta}_n \eta_n\right) |_{\bar{\Theta}=\Theta=0} \tag{26}$$

verwendet werden.

4 Pfadintegraldarstellung

Aus den Kenntnissen der bisherigen Rechnung kann die Pfadintegraldarstellung des freien Dirac-Feldes bestimmt werden. Dazu sei erwähnt, dass die Feldoperatoren $\psi\bar{\psi}$ nun Grassmannwertig sind. Weiterhin kommen noch zwei Spinorquellen $\bar{\eta}, \eta$ hinzu. Dadurch ergibt sich die Pfadintegraldarstellung zu:

$$Z[\bar{\eta}, \eta] = \frac{1}{Z_0} \int \mathcal{D}\bar{\Psi}\mathcal{D}\Psi \exp\left(\mathrm{i} \int \mathrm{d}^4x \bar{\Psi}(\mathrm{i}\partial\!\!\!/ - m)\Psi + \bar{\eta}\Psi + \bar{\Psi}\eta\right) \tag{27}$$

für die Normierung Z_0 erhält man

$$\begin{aligned} Z_0 &= \int \mathcal{D}\bar{\Psi}\mathcal{D}\Psi \exp\left(\mathrm{i} \int \mathrm{d}^4x \bar{\Psi}(\mathrm{i}\partial\!\!\!/ - m)\Psi\right) \\ &= \det(\mathrm{i}S^{-1}) \\ \text{substituiert mit} \quad S^{-1} &= (\mathrm{i}\partial\!\!\!/ - m)\,. \end{aligned} \tag{28}$$

Im Folgendem wird Gleichung (27) vereinfacht:
Zunächst wird der Ausdruck im Exponenten verkürtzt mit

$$Q(\Psi, \bar{\Psi}) = \bar{\Psi}S^{-1}\Psi + \bar{\eta}\Psi + \bar{\Psi}\eta\,. \tag{29}$$

Es wird nun das Minimum für Q bestimmt. Diese Vorgehensweise ist equivalent zu einer quadratischen Ergänzung, da es sich um Grassmann-Zahlen handelt. Es ergibt sich:

$$\Psi_m = -S\eta \quad \text{und} \quad \bar{\Psi}_m = -\bar{\eta}S\,. \tag{30}$$

Nun werden die Ausdrücke eingesetzt:

$$Q_m(\Psi_m, \bar{\Psi}_m) = (-\bar{\eta}S)S^{-1}(-S\eta) + \bar{\eta}(-S\eta) + (-\bar{\eta}S)\eta \tag{31}$$

$$= \bar{\eta}S\eta - 2\bar{\eta}S\eta \tag{32}$$

$$= -\bar{\eta}S\eta\,. \tag{33}$$

Daraus folgt für Gleichung (27):

$$Z[\bar{\eta},\eta] = \frac{1}{Z_0}\int \mathcal{D}\bar{\Psi}\mathcal{D}\Psi \exp\left(\mathrm{i}\int \mathrm{d}^4 x Q_m + (\bar{\Psi}-\bar{\Psi}_m)S^{-1}(\Psi-\Psi_m\right) \tag{34}$$

$$= \left(\det(\mathrm{i}S^{-1})\right)^{-1}\det(\mathrm{i}S^{-1})\exp\left(-\mathrm{i}\int \mathrm{d}^4x\mathrm{d}^4y\bar{\eta}(x)S\eta(y)\right) \tag{35}$$

Es wurde ausgenutzt, dass $\exp(\mathrm{i}Q_m)$ nicht von Ψ und $\bar{\Psi}$ abhängt und aus dem Integranden gezogen werden kann. Damit vereinfacht sich der Ausdruck zu

$$Z[\bar{\eta},\eta] = \exp\left(-\mathrm{i}\int \mathrm{d}^4x\mathrm{d}^4y\bar{\eta}(x)S\eta(y)\right), \tag{36}$$

sodass sich der Propagator einfacher bestimmen lässt.

5 Propagator

Um den Propagator zu berechnen, wird die Zweipunkt-Funktion eingeführt mit

$$\langle 0|T\bar{\Psi}_\alpha(x)\Psi_\beta(y)|0\rangle \equiv \mathrm{i}S(x-y)_{\alpha\beta}\ . \tag{37}$$

Dabei soll der Operator T für eine Zeitordnung innerhalb der Produkte sorgen. Die beiden Felder werden in ihrem Grundzustand berechnet

$$\langle 0|\Psi_\alpha(x)\bar{\Psi}_\beta(y)|0\rangle = ... = \int \tilde{\mathrm{d}p}\mathrm{e}^{\mathrm{i}p(x-y)}(-\not{p}+m)_{\alpha\beta} \tag{38}$$

$$\langle 0|\bar{\Psi}_\beta(y)\Psi_\alpha(x)|0\rangle = ... = \int \tilde{\mathrm{d}p}\mathrm{e}^{\mathrm{i}p(x-y)}(-\not{p}-m)_{\alpha\beta}\,. \tag{39}$$

Zusammenführen der Felder und deren Fourier-Transformation ergibt sich

$$\langle 0|T\bar{\Psi}_\alpha(x)\Psi_\beta(y)|0\rangle = \mathrm{i}\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\mathrm{e}^{\mathrm{i}p(x-y)}\frac{(-\not{p}+m)_{\alpha\beta}}{p^2+m^2-\mathrm{i}\epsilon}\,. \tag{40}$$

Daraus folgt trivial mit Gleichung (37)

$$S(x-y)_{\alpha\beta} = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\mathrm{e}^{\mathrm{i}p(x-y)}\frac{(-\not{p}+m)_{\alpha\beta}}{p^2+m^2-\mathrm{i}\epsilon}\,. \tag{41}$$

Die ausführlichen Rechnungen können in [MSred16] nachgeschlagen werden.
Anschließend wird der freie Propagator des Dirac-Feldes berechnet:

$$\langle 0|T\bar{\Psi}_\alpha(x)\Psi_\beta(y)|0\rangle = -\frac{\delta^2 Z[\eta,\bar{\eta}]}{\delta(\bar{\eta}(x))\delta(\eta(y))}\Big|_{\eta=\bar{\eta}=0} \tag{42}$$

$$= -\frac{\delta}{\delta\bar{\eta}(x)}\frac{\delta}{\delta\eta(y)}\exp\left(-\mathrm{i}\int \mathrm{d}^4x\mathrm{d}^4y\bar{\eta}(x)S(x-y)\eta(y)\right)\Big|_{\eta=\bar{\eta}=0} \tag{43}$$

$$= -\frac{\delta}{\delta\bar{\eta}(x)}\left(\exp\left(-\mathrm{i}\int \mathrm{d}^4x\mathrm{d}^4y\bar{\eta}(x)S(x-y)\eta(y)\right)(-\mathrm{i}\bar{\eta}(x)S(x-y))\right)\Big|_{\eta=\bar{\eta}=0} \tag{44}$$

$$= \exp\left(-\mathrm{i}\int \mathrm{d}^4x\mathrm{d}^4y\bar{\eta}(x)S(x-y)\eta(y)\right)(\mathrm{i}S(x-y)) \tag{45}$$

$$- \exp\left(-\mathrm{i}\int \mathrm{d}^4x\mathrm{d}^4y\bar{\eta}(x)S(x-y)\eta(y)\right)(-\mathrm{i}\bar{\eta}(x)S(x-y))(-\mathrm{i}S(x-y)\eta(y))\Big|_{\eta=\bar{\eta}=0} \tag{46}$$

$$= \mathrm{i}S(x-y)\,. \tag{47}$$

Damit wurde gezeigt, dass der Propagator

$$\boxed{\langle 0|T\bar{\Psi}_\alpha(x)\Psi_\beta(y)|0\rangle = \mathrm{i}S(x-y)_{\alpha\beta}} \tag{48}$$

ist. Weiter soll vorausgesetzt werden, dass S existiert mit

$$S(x) = (\mathrm{i}\gamma_\mu\partial^\mu + m)\Delta_F(x)\,. \tag{49}$$

Gleichung (49) wird mit der Dirac-Gleichung multipliziert:

$$\begin{aligned} S^{-1}S &= (\mathrm{i}\gamma_\mu\partial^\mu - m)(\mathrm{i}\gamma_\mu\partial^\mu + m)\Delta_F(x) \\ &= (-\Box - m^2)\Delta_F(x) \\ &= \delta^4(x)\,. \end{aligned} \tag{50}$$

Vergleicht man den Propagator des skalaren-Feldes

$$\langle 0|T\bar{\Psi}(x)\Psi(y)|0\rangle = \mathrm{i}\Delta_F(x-y) \tag{51}$$

mit dem des Dirac-Feldes

$$\langle 0|T\bar{\Psi}(x)\Psi(y)|0\rangle = \mathrm{i}S(x-y) \tag{52}$$

wird ersichtlich, dass der Propagator $S(x-y)$ eine Green's Funktion für den Dirac-Wellenoperator ist.

6 Quellen

Literatur

[MSred16] M. Srednicki:
Quantum Field Theory
Univerity of Carlifornia, Santa Barbara, 2006.

[LRyd96] L. Ryder:
Quantum Field Theory
Cambridge University Press, Cambridge, 1996.