

Der Aharononov-Bohm-Effekt  
in Pfadintegraldarstellung  
Seminar zur Theorie der Teilchen und Felder  
WS14/15  
von Jonathan Noky

7. Januar 2016

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>2</b>
1.1	Allgemeines . . . . .	2
1.2	Grundlagen . . . . .	3
<b>2</b>	<b>Berechnung</b>	<b>3</b>
2.1	Quantenmechanik . . . . .	3
2.2	Pfadintegrale . . . . .	5
<b>3</b>	<b>Experimente</b>	<b>7</b>
3.1	Chambers (1962) . . . . .	7
3.2	Möllenstedt und Bayh (1964) . . . . .	8
3.3	Tonomura (1968) . . . . .	8

# 1 Einleitung

## 1.1 Allgemeines

Der Aharonov-Bohm-Effekt wurde von David Bohm und Yakir Aharonov in einer 1959 veröffentlichten Arbeit theoretisch beschrieben und 1968 von Akira Tonomura endgültig experimentell bestätigt. Er beschreibt die Wechselwirkung von Elektronen mit einem Magnetfeld, von dem sie räumlich getrennt sind. Diese Wechselwirkung ist rein quantenmechanischer Natur und wird durch das Vektorpotential vermittelt. Der Aharonov-Bohm-Effekt zeigt somit die physikalische Relevanz der Vektorpotentials selbst, welches bis dahin als reine Hilfsgröße angesehen wurde.

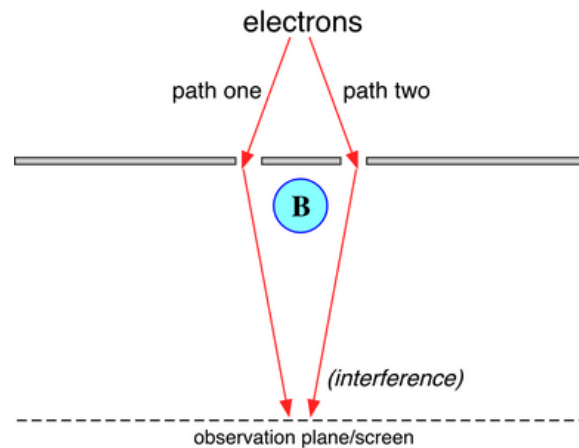


Abbildung 1: Schematische Darstellung eines Versuchsaufbaus zum Aharonov-Bohm-Effekt. Aus [2]

Der Aharonov-Bohm-Effekt lässt sich anhand eines modifizierten Doppelspaltversuchs mit Elektronen erklären [Abb. 1]. Dabei werden Elektronen auf einen Doppelspalt gestrahlt und bilden aufgrund ihrer Wellennatur ein Interferenzmuster auf dem Schirm dahinter. Zusätzlich befindet sich eine unendlich lange, abgeschirmte Spule zwischen den beiden Spalten, durch die ein Strom fließt. Dadurch entsteht innerhalb der Spule ein Magnetfeld, welches die Elektronen aufgrund der Abschirmung nicht wahrnehmen. Trotzdem kann durch Änderung des Stromflusses und damit des Magnetfeldes eine Verschiebung des Interferenzmusters auf dem Schirm erzeugt werden. Diese lässt sich durch eine Wechselwirkung mit dem Vektorpotential erklären und wird Aharonov-Bohm-Effekt genannt.

## 1.2 Grundlagen

Elektrische und magnetische Felder lassen sich in der Elektrodynamik durch Potentiale ausdrücken. Dabei wird ein Vektorpotential  $\vec{A}$  und ein Skalarpotential  $\phi$  genutzt, so dass gilt:

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} \quad \vec{E} = -\nabla\phi - \dot{\vec{A}}. \quad (1)$$

Für die so erhaltenen Potentiale besteht Eichfreiheit mit einer beliebigen skalaren Funktion  $\Lambda$ , d.h. die das Problem beschreibenden Gleichungen bleiben invariant, wenn die Potentiale wie folgt transformiert werden:

$$\vec{A}' = \vec{A} + \nabla\Lambda \quad \phi' = \phi - \dot{\Lambda}. \quad (2)$$

Außerdem muss die Lösung des ursprünglichen Systems  $\Psi$  transformiert werden:

$$\Psi' = \Psi e^{i\frac{e}{\hbar}\Lambda}. \quad (3)$$

Da im Fall des Aharonov-Bohm-Effektes kein elektrisches Feld vorliegt, kann für die folgenden Berechnungen  $\phi = 0$  gewählt werden.

## 2 Berechnung

### 2.1 Quantenmechanik

Um den Aharonov-Bohm-Effekt in der Quantenmechanik zu berechnen, wird der Hamilton-Operator für ein Elektron in einem Magnetfeld nach dem Prinzip der minimalen Kopplung verwendet:

$$\hat{H} = \frac{1}{2m}(\hat{\vec{p}} + e\vec{A})^2 + V. \quad (4)$$

Um später eine Phasenverschiebung durch das Magnetfeld der Spule zu erhalten, wird zunächst die Lösung für den feldfreien Fall benötigt. In diesem Fall kann das Vektorpotential  $\vec{A} = \vec{0}$  gesetzt werden. Da das Elektron sich entweder durch den ersten oder durch den zweiten Spalt bewegen muss, erhält man als allgemeine Lösung eine Superposition dieser beiden Varianten:

$$\Psi_0 = \Psi_{1,0} + \Psi_{2,0}. \quad (5)$$

Lässt man nun einen Strom durch die Spule fließen, bildet sich ein Magnetfeld in ihr aus und damit auch ein Vektorpotential  $\vec{A}'$  im gesamten Raum. Dieses Vektorpotential erhält man aus dem alten durch eine Eichtransformation  $\Lambda$ , die wie folgt gewählt ist:

$$\Lambda = \int_{\vec{y}}^{\vec{x}} \vec{A}' d\vec{r}. \quad (6)$$

Hierbei ist  $\vec{y}$  der Ausgangspunkt des Elektrons vor dem Doppelspalt und  $\vec{x}$  der Endpunkt auf dem Schirm. Für eine so gewählte Eichfunktion gilt:

$$\vec{A}' = \vec{A} + \nabla\Lambda = \nabla\Lambda = \nabla \int_{\vec{y}}^{\vec{x}} \vec{A}' d\vec{r} = \vec{A}'. \quad (7)$$

Die allgemeine Lösung für den Fall mit eingeschaltetem Magnetfeld  $\Psi_B$  ergibt sich nun aus einer Superposition der Lösungen für die beiden Einzelspalte  $\Psi_{1,B}$  und  $\Psi_{2,B}$ . Diese erhält man aus den Lösungen für den feldfreien Fall durch Eichtransformation mit  $\Lambda$ , wobei das Integral entlang einer Kurve ausgeführt werden muss, die durch Spalt 1 ( $c_1$ ) respektive Spalt 2 ( $c_2$ ) führt:

$$\Psi_{1,B} = \Psi_{1,0} e^{i\frac{e}{\hbar}\Lambda} = \Psi_{1,0} e^{i\frac{e}{\hbar} \int_{c_1} \vec{A}' d\vec{r}} \quad (8)$$

und

$$\Psi_{2,B} = \Psi_{2,0} e^{i\frac{e}{\hbar}\Lambda} = \Psi_{2,0} e^{i\frac{e}{\hbar} \int_{c_2} \vec{A}' d\vec{r}}. \quad (9)$$

Daraus erhält man die allgemeine Lösung:

$$\Psi_B = \Psi_{1,B} + \Psi_{2,B} = (\Psi_{1,0} + \Psi_{2,0} e^{i\frac{e}{\hbar} \int_{c_2-c_1} \vec{A}' d\vec{r}}) e^{i\frac{e}{\hbar} \int_{c_1} \vec{A}' d\vec{r}}. \quad (10)$$

Das Integral im Exponenten innerhalb der Klammer kann weiter ausgewertet werden:

$$\frac{e}{\hbar} \int_{c_2-c_1} \vec{A}' d\vec{r} = \frac{e}{\hbar} \oint_c \vec{A}' d\vec{r} = \frac{e}{\hbar} \int_F \nabla \times \vec{A}' d\vec{f} = \frac{e}{\hbar} \int_F \vec{B} d\vec{f} = \frac{e}{\hbar} \Phi = \Delta\varphi. \quad (11)$$

Hierbei wurde zunächst das Integral über die beiden Wege zu einem Ringintegral zusammengefasst, auf dieses wurde der Satz von Stokes angewendet und die Gleichung 1. Das Integral des Magnetfeldes über die Fläche ergibt den magnetischen Fluss  $\Phi$ .

Die Intensität des Interferenzmusters kann über den Betrag der Wellenfunktion bestimmt werden:

$$|\Psi_0| = |\Psi_{1,0} + \Psi_{2,0}| \quad (12)$$

und

$$|\Psi_B| = |\Psi_{1,B} + \Psi_{2,B} e^{i\Delta\varphi}|. \quad (13)$$

Das Interferenzmuster verschiebt sich also durch das Einschalten des Magnetfeldes um eine Phase  $\Delta\varphi$ .

## 2.2 Pfadintegrale

Für die Berechnung mittels Pfadintegralen wird zunächst die Lagrange-Funktion für ein Elektron im Magnetfeld benötigt:

$$L = \underbrace{\frac{m}{2} \dot{\vec{r}}^2}_{L_0} + e \dot{\vec{r}} \vec{A} = L_0 + e \dot{\vec{r}} \vec{A}. \quad (14)$$

Das Elektron sei zum Zeitpunkt  $t_0$  am Ausgangspunkt  $\vec{y}$  vor dem Doppelspalt und zum Zeitpunkt  $t_1$  am Punkt  $\vec{x}$  auf dem Schirm. Die Wirkung ergibt sich dann als:

$$S = \int_{t_0}^{t_1} L dt = \underbrace{\int_{t_0}^{t_1} L_0 dt}_{S_0} + \int_{t_0}^{t_1} e \dot{\vec{r}} \vec{A} dt = S_0 + e \int_{t_0}^{t_1} \vec{A} \frac{d\vec{r}}{dt} dt = S_0 + e \int_{\vec{y}}^{\vec{x}} \vec{A} d\vec{r}. \quad (15)$$

Hierbei wurde im Integral eine Rücksubstitution von der Zeit zum Ort vorgenommen.

Da bei der Pfadintegralmethode am Ende alle möglichen Wege zum Ergebnis beitragen und sich diese Wege im oben erhaltenen Wegintegral widerspiegeln, wird nun zunächst folgendes Integral betrachtet:

$$e \int_{c_{1,a}} \vec{A} d\vec{r} - e \int_{c_{1,b}} \vec{A} d\vec{r} = e \oint_{c_{1,a}-c_{1,b}} \vec{A} d\vec{r} = e \int_F \nabla \times \vec{A} d\vec{f} = e \int_F \vec{B} d\vec{f} = 0. \quad (16)$$

Hierbei sind  $c_{1,a}$  und  $c_{1,b}$  zwei Wege durch Spalt 1. Da die Fläche, die diese beiden Wege umschließen, die Spule nicht enthält, ist hier auch das eingeschlossene Magnetfeld 0. Die beiden Wege wurden durch Spalt 1 beliebig gewählt und daher kann allgemein geschlussfolgert werden, dass das Integral für einen solchen Weg immer den gleichen Wert haben wird:

$$e \int_{c_{1,a}} \vec{A} d\vec{r} = e \int_{c_{1,b}} \vec{A} d\vec{r} = \alpha_1. \quad (17)$$

Analog gilt dies für zwei Wege durch Spalt 2:

$$e \int_{c_{2,a}} \vec{A} d\vec{r} = e \int_{c_{2,b}} \vec{A} d\vec{r} = \alpha_2. \quad (18)$$

Jetzt kann das eigentliche Pfadintegral gelöst werden, wobei es in zwei Teile aufgespalten wird, von denen der erste alle Wege durch Spalt 1 und der

zweite alle Wege durch Spalt 2 beinhaltet:

$$\begin{aligned}
\langle \vec{x} | \vec{y} \rangle &= \int Dxe^{\frac{i}{\hbar}S} = \int^{(1)} Dxe^{\frac{i}{\hbar}S} + \int^{(2)} Dxe^{\frac{i}{\hbar}S} \\
&= \int^{(1)} Dxe^{\frac{i}{\hbar}(S_0+\alpha_1)} + \int^{(2)} Dxe^{\frac{i}{\hbar}(S_0+\alpha_2)} \\
&= e^{\frac{i}{\hbar}\alpha_1} \underbrace{\int^{(1)} Dxe^{\frac{i}{\hbar}S_0}}_{K_1} + e^{\frac{i}{\hbar}\alpha_2} \underbrace{\int^{(2)} Dxe^{\frac{i}{\hbar}S_0}}_{K_2} \\
&= (K_1 + K_2 e^{\frac{i}{\hbar}(\alpha_2-\alpha_1)}) e^{\frac{i}{\hbar}\alpha_1}.
\end{aligned} \tag{19}$$

Hierbei wurde ausgenutzt, dass die beiden  $\alpha$  als konstante Werte vor das Integral gezogen werden können.  $K_1$  und  $K_2$  sind die Übergangsamplituden für den feldfreien Fall, da hier nur  $L_0$  bzw.  $S_0$  eine Rolle spielt.

Nun kann der Exponent in der Klammer ausgewertet werden:

$$\begin{aligned}
\frac{\alpha_2 - \alpha_1}{\hbar} &= \frac{1}{\hbar} \left( \int_{c_1} e \vec{A} d\vec{r} - \int_{c_2} e \vec{A} d\vec{r} \right) = \frac{e}{\hbar} \oint_{c_1-c_2} \vec{A} d\vec{r} = \frac{e}{\hbar} \int_F \nabla \times \vec{A} d\vec{f} \\
&= \frac{e}{\hbar} \int_F \vec{B} d\vec{f} = \frac{e}{\hbar} \Phi = \Delta\varphi.
\end{aligned} \tag{20}$$

Daraus kann nun die Intensität des Interferenzmusters bestimmt werden, indem der Betrag betrachtet wird:

$$|\langle \vec{x} | \vec{y} \rangle| = |(K_1 + K_2 e^{\frac{i}{\hbar}(\alpha_2-\alpha_1)}) e^{\frac{i}{\hbar}\alpha_1}| = |K_1 + K_2 e^{i\Delta\varphi}|. \tag{21}$$

auch hier verschiebt sich das Interferenzmuster um eine Phase  $\Delta\varphi$ , wenn das Magnetfeld eingeschaltet wird und die Phase ist identisch zu der mittels Quantenmechanik ausgerechneten Phase (vgl. Gleichungen 11 und 20).

Betrachtet man bei der Berechnung des Pfadintegrals auch Wege, die sich mehrfach um die Spule winden, so können nach den gleichen Rechenschritten auch hier alle Wege gleicher Windungszahl einer Konstante zugeordnet werden und das Endergebnis erhält folgende Form:

$$|\langle \vec{x} | \vec{y} \rangle| = \left| \sum_{n \in \mathbb{Z}} K_n e^{in\Delta\varphi} \right|. \tag{22}$$

Da jedoch die  $K_n$  für höhere Windungen sehr klein werden, weicht dieses kaum vom vorher errechneten Ergebnis ab.

## 3 Experimente

### 3.1 Chambers (1962)

In den Rechnungen zum Aharonov-Bohm-Effekt wird von einer unendlich langen Spule ausgegangen, die das Magnetfeld nur in ihrem Inneren hält. Da dies experimentell schwer zu realisieren ist, gab es mehrere Versuche, den Effekt zu zeigen.

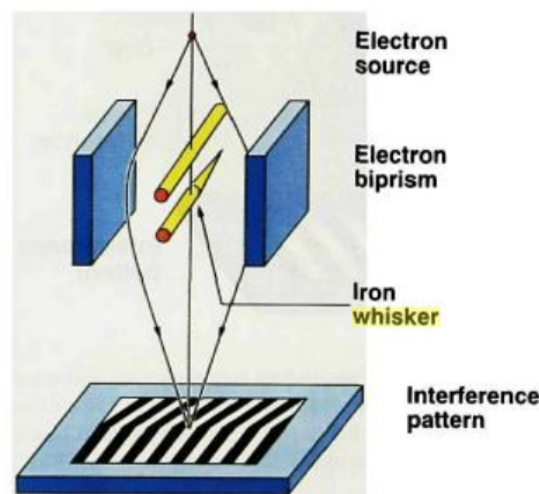


Abbildung 2: Schematische Darstellung des Versuchsaufbaus von Chambers 1962. Aus [3]

Der erste Versuch erfolgte 1962 von Robert G. Chambers. Der Versuchsaufbau ist in Abb. 2 dargestellt: Ein Elektronenstrahl wird durch ein Biprisma in zwei Teilstrahlen gespalten, die auf einem Schirm wieder zusammentreffen und durch Interferenz ein entsprechendes Linienmuster erzeugen. Zwischen den beiden Elektronenstrahlen befindet sich ein magnetischer Eiseneinkristall ("whisker").

Das Magnetfeld des whiskers erzeugt einen magnetischen Fluss im Kristall, der proportional zur Querschnittsfläche ist. Zu einer Seite hin ist der Einkristall angespitzt. Das führt zu einer Abnahme des magnetischen Flusses und sollte nach dem Aharonov-Bohm-Effekt eine Verschiebung des Interferenzmusters bewirken. Diese konnte auch beobachtet werden, allerdings war bei diesem Versuch sowohl die Abschirmung der Elektronen vom Magnetfeld als auch die Beschränkung des Magnetfeldes auf den Einkristall nicht gegeben.



### 3.2 Möllenstedt und Bayh (1964)

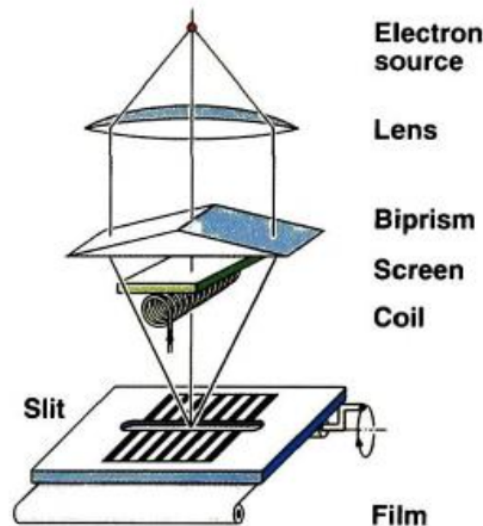


Abbildung 3: Schematische Darstellung des Versuchsaufbaus von Möllenstedt und Bayh 1964. Aus [3]

1964 entwickelten Gottfried Möllenstedt und W. Bayh das Experiment von Chambers weiter, indem sie den Einkristall durch eine sehr lange und sehr dünne Spule ersetzten und zusätzlich über der Spule eine Abschirmung anbrachten [Abb. 3]. Durch variieren des Stromflusses in der Spule wurde der magnetische Fluss variiert und die jeweilige Verschiebung des Interferenzmusters gemessen. Die so erhaltenen Ergebnisse trafen die vorhersagen des Aharonov-Bohm-Effektes, obwohl auch hier eine komplette Abschirmung nicht gegeben war.

### 3.3 Tonomura (1968)

1968 entwickelte Akira Tonomura ein Experiment, bei dem mit Hilfe von Supraleitern das Magnetfeld vollständig abgeschirmt werden konnte. Dafür wird ein mit Niob und Kupfer beschichteter toroidaler Magnet verwendet, bei dem die Magnetfeldlinien innerhalb des Magnetringes verlaufen und sich ein magnetischer Fluss im Inneren des Rings ausbildet. Die supraleitende Niobbeschichtung sorgt dafür, dass die Magnetfeldlinien im Magneten bleiben und die zusätzliche Kupferbeschichtung verhindert, dass Elektronen in den Ring eindringen können.

Der Elektronenstrahl wird auch hier durch ein Biprisma aufgeteilt und ein Teil wird durch den Ring, ein Teil daran vorbei geleitet [Abb. 4]. Auf dem Schirm kann man dann die Interferenzmuster beobachten. Da im Innern des

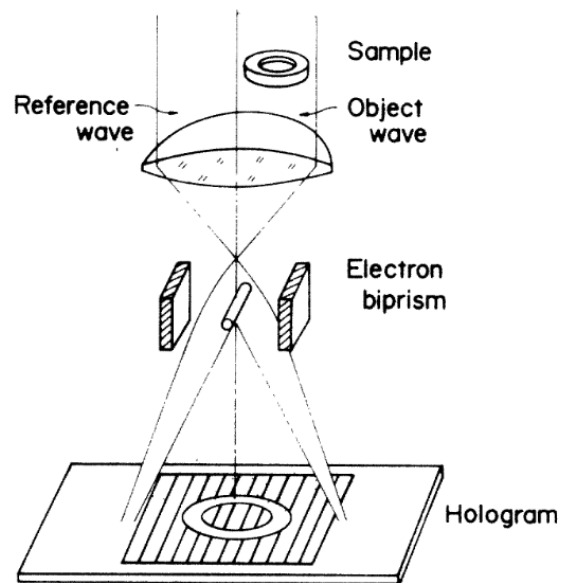


Abbildung 4: Schematische Darstellung des Versuchsaufbaus von Möllenstedt und Bayh 1964. Aus [4]

Rings ein magnetischer Fluss vorhanden ist, kann man hier eine Verschiebung im Vergleich zum flussfreien Außenraum erkennen, die genau so groß ist wie durch den Aharonov-Bohm-Effekt vorhergesagt. Dieses Experiment gilt als Beweis des Aharonov-Bohm-Effektes.

## Literatur

- [1] Gernot Münster: Quantentheorie; de Gruyter (2006).
- [2] <https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/5/51/Aharonov-bohm.png> (06.01.2016).
- [3] Akira Tonomura: The Quantum World Unveiled by Electron Waves, World Scientific (1998).
- [4] Akira Tonomura & collaborators: Evidence for Aharonov-Bohm Effect with magnetic field completely shielded from electron wave; Phys. Rev. Lett. 56p. 792 (1986).