

# Phasenübergänge

## Seminar zur Theorie der Teilchen und Felder

### Kosmologie und Teilchenphysik

Christopher Schmoll

Vortrag vom : 17. Dezember 2014

# Inhaltsverzeichnis

<b>1 Einleitung</b>	<b>3</b>
<b>2 Klassische Theorie</b>	<b>4</b>
2.1 Thermodynamik . . . . .	4
2.1.1 Einteilung nach Ehrenfest . . . . .	6
2.2 Landau Theorie . . . . .	8
<b>3 Phasenübergänge im frühen Universum</b>	<b>11</b>
3.1 Symmetrie und Wechselwirkungen . . . . .	11
3.1.1 Spontane Symmetriebrechung . . . . .	12
3.2 Elektroschwacher Phasenübergang . . . . .	15
3.3 Topologische Defekte . . . . .	17
3.3.1 Domain Walls . . . . .	17
3.3.2 Cosmic Strings . . . . .	18
3.3.3 Monopole . . . . .	19
<b>4 Fazit</b>	<b>21</b>

# 1 Einleitung

Die vorliegende Ausarbeitung beschäftigt sich mit dem Thema der Phasenübergänge. Ausgehend von der klassischen Theorie und thermodynamischen Grundlagen werden Phasenübergänge und deren Ursachen diskutiert. Als Beispiel einer klassischen Theorie wird die Landau-Theorie knapp vorgestellt.

Um ein Modell für die Phasenübergänge im frühen Universum zu liefern, werden zunächst die fundamentalen Wechselwirkungen des Standardmodells vorgestellt. Im Rahmen der  $\Phi^4$ -Theorie wird dann der Mechanismus der spontanen Symmetriebrechung vorgestellt, die für den Higgs-Mechanismus essentiell ist. Der Schwerpunkt liegt dabei auf dem elektroschwachen Phasenübergang. Mögliche topologische Defekte, die bei Phasenübergängen im frühen Universum entstanden sein könnten, werden abschließend vorgestellt.

## 2 Klassische Theorie

### 2.1 Thermodynamik

Als Phasen werden im Allgemeinen die möglichen Zustandsformen eines makroskopischen Systems im thermischen Gleichgewicht bezeichnet. Dabei weisen die makroskopischen Observablen in verschiedenen Phasen Unterschiede auf. Als Beispiel für Phasenübergänge die bereits früh studiert wurden sind die Änderungen der Aggregatzustände zu nennen. So unterscheidet sich die Teilchendichte zwischen flüssiger und gasförmiger Phase drastisch. Weitere phasenabhängige Observablen sind bspw. die Magnetisierung im Übergang zwischen Ferro- und Paramagneten, die elektrische Leitfähigkeit und die Kristallstruktur, die sich beim Übergang zwischen  $\gamma$ -Fe (fcc) und  $\alpha$ -Fe (bcc) ändert.

Im Bereich der Phasenübergänge weisen die makroskopischen Variablen sogenannte kritische Bereiche auf, in denen sich diese dann schlagartig ändern bzw. mehrere Lösungen besitzen. Wobei die stabilen Lösungen jeweils verschiedene Phasen charakterisieren. In Abb. 2.1 ist das p-T-Phasendiagramm für Wasser dargestellt. Im

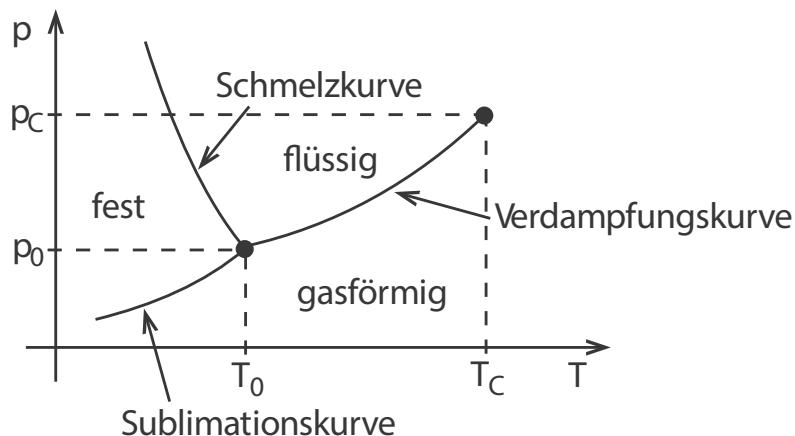


Abbildung 2.1: *Phasendiagramm von Wasser. Dargestellt sind die Einphasenbereiche, die drei Koexistenzkurven und der Tripelpunkt.[1]*

Diagramm sind die Koexistenzkurven eingezeichnet, die die verschiedenen Phasen jeweils trennen. Auf den Kurven selbst sind jeweils zwei Phasen stabil. So stehen auf der Verdampfungskurve die flüssige und gasförmige Phase im Gleichgewicht. Als besonderer Punkt sei noch der Tripelpunkt hervorgehoben, an dem alle drei Phasen im Gleichgewicht stehen. Wichtig für die Beschreibung dieser Abhängigkeit ist die Betrachtung der Freiheitsgrade des Systems, diese werden durch die Gibb'sche

Phasenbeziehung beschrieben.

$$f = 2 + \alpha - \pi.$$

Dabei beschreibt  $f$  die Anzahl der Freiheitsgrade. Diese hängt von  $\alpha$  der Anzahl der Komponenten des Systems, hier  $\alpha = 1$  da Wasser aus einer Molekülsorte besteht, und  $\pi$  der Anzahl der koexistierenden Phasen ab. Für die Koexistenzkurven gilt also  $f = 1$ , die Wahl einer der beiden Observablen bestimmt folglich die Andere.

Die Ursache für Phasenübergänge wird bei einer Betrachtung der Thermodynamischen Potentiale deutlich, insbesondere der freien Enthalpie  $G$  und der Freien Energie  $F$ :

$$F = U - TS$$

$$G = U - TS + pV$$

Eine Minimierung dieser Potentiale schafft dabei eine stabile Konfiguration des Systems. Dabei ist die Temperaturabhängigkeit der Potentiale für die Minimierung entscheidend. Demnach ist es günstig die innere Energie  $U$  zu minimieren, allerdings bei gleichzeitiger Maximierung der Entropie. Beide Prozesse konkurrieren, wobei entsprechend der Temperaturabhängigkeit bei kleinen Temperaturen die innere Energie dominant ist, während bei hohen Temperaturen der Entropie Term ausschlaggebend ist. Unterschiedliche Phasen weisen dabei unterschiedliche innere Energien und Entropien auf und somit einen unterschiedlichen Verlauf der Gibb'schen Enthalpie. In Abb. 2.2 ist dieser Zusammenhang für einen Phasenübergang flüssig-gasförmig dargestellt.

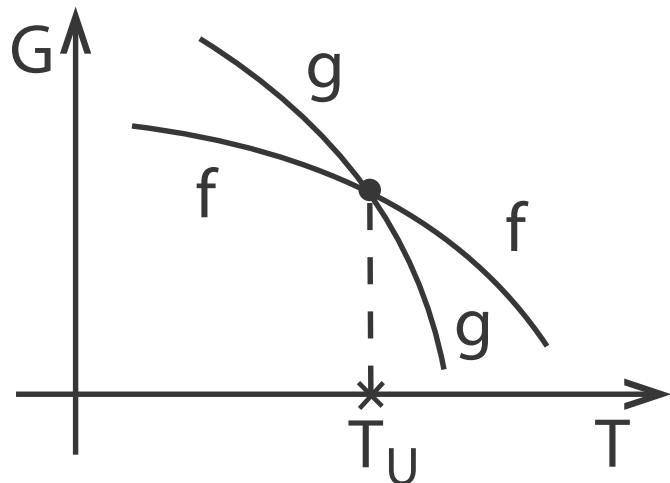


Abbildung 2.2: *Freie Enthalpie für einen Phasenübergang zwischen flüssiger und gasförmiger Phase.[2]*

Deutlich zu erkennen ist der Schnittpunkt beider Kurven bei  $T = T_U$ . Während für kleinere Temperaturen die flüssige Phase die stabile Konfiguration darstellt, ist für

höhere Temperaturen die Gasphase stabil. Es findet also ein Phasenübergang bei  $T_U$  statt, der durch die Minimierung der freien Enthalpie hervorgerufen wurde. Nicht alle Phasenübergänge weisen dabei das gleiche Verhalten beim Übergang auf, eine erste Klassifikation der Phasenübergänge wurde durch Ehrenfest eingeführt.

### 2.1.1 Einteilung nach Ehrenfest

”Nach Ehrenfest definiert man als Ordnung des Phasenübergangs die Ordnung des niedrigsten Differentialquotienten von  $G$ , der beim Überschreiten der Koexistenzlinie eine Diskontinuität aufweist.”[1]

Bei einem Phasenübergang  $n$ -ter Ordnung sind folglich alle Ableitungen mit  $m < n$  stetig während die  $n$ -te Ableitung unstetig ist:

$$\left( \frac{\partial^m G_\alpha}{\partial T^m} \right)_p = \left( \frac{\partial^m G_\beta}{\partial T^m} \right)_p, \quad \left( \frac{\partial^m G_\alpha}{\partial p^m} \right)_T = \left( \frac{\partial^m G_\beta}{\partial p^m} \right)_T$$

$$\left( \frac{\partial^n G_\alpha}{\partial T^n} \right)_p \neq \left( \frac{\partial^n G_\beta}{\partial T^n} \right)_p, \quad \left( \frac{\partial^n G_\alpha}{\partial p^n} \right)_T \neq \left( \frac{\partial^n G_\beta}{\partial p^n} \right)_T.$$

#### Phasenübergang 1. Ordnung

Der Phasenübergang niedrigster Ordnung ist dabei der Phasenübergang 1. Ordnung, gemäß der Definition ist die freie Enthalpie  $G(T, p)$  stetig, während ein endlicher Sprung in den ersten Ableitungen

$$S(t, p) = \left( \frac{\partial G}{\partial T} \right)_p, \quad V(T, p) = \left( \frac{\partial G}{\partial p} \right)_T$$

vorliegt. Entscheidend ist, dass es sich bei den Diskontinuitäten um endliche Sprünge handelt. Da die Observablen die mit den Ableitungen assoziiert werden, wie hier die Entropie und das Volumen, endliche Werte für beide Phasen aufweisen sollen. Ein typisches Beispiel für die Phasenübergänge 1. Ordnung sind die Änderungen der Aggregatzustände. In Abbildung 2.3 ist ein solcher Phasenübergang für den Übergang zwischen der flüssigen und der gasförmigen Phase dargestellt. Während die Gibb'sche Enthalpie stetig ist, weisen die Ableitungen gemäß der Definition einen endlichen Sprung auf. Grund dafür ist die Zusammensetzung beider Enthalpiekurven am kritischen Punkt der Observablen, wie bereits in Abb. 2.2 diskutiert wurde.

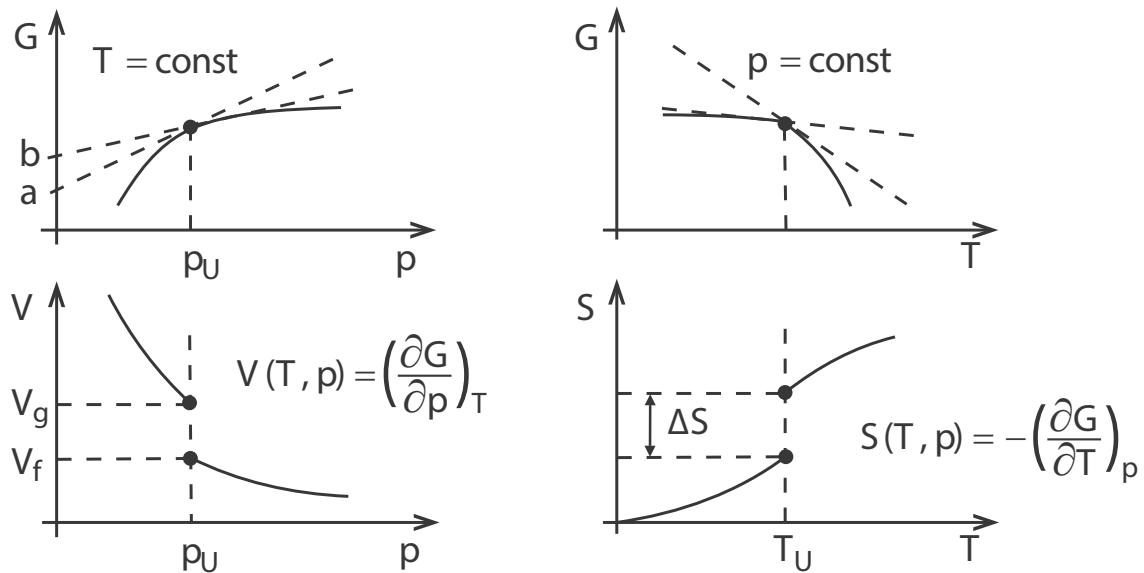


Abbildung 2.3: Verhalten der freien Enthalpie  $G$  und den jeweils ersten Ableitungen dem Volumen  $V$  und der Entropie  $S$ . [2]

### Phasenübergang 2. Ordnung

Der nächst höhere Phasenübergang ist der zweiter Ordnung. Hier sind nun sowohl die freie Enthalpie, als auch das Volumen und die Entropie stetig. Die Suszeptibilitäten

$$C_p = -T \left( \frac{\partial^2 G}{\partial T^2} \right)_p, \\ \kappa_T = -\frac{1}{V} \left( \frac{\partial^2 G}{\partial p^2} \right)_T, \\ \beta = \frac{1}{V} \frac{\partial^2 G}{\partial T \partial p}$$

sind bei diesem Phasenübergang unstetig. Beispiele dafür sind das Van der Waals-Gas, der Weiß'sche Ferromagnet und der Supraleiter im Nullfeld.

### Kritik an Ehrenfest

Folgt man der reinen Ehrenfest'schen Definition existieren auch Phasenübergänge höherer Ordnungen. Allerdings können nur bis zur zweiten Ableitung physikalische Observablen zugeordnet werden. Eine Diskontinuität höherer Ordnung besitzt physikalisch folglich keine Bedeutung. Die Frage die sich ebenfalls stellt, wenn bis zu hohen Ordnungen keine Unterschiede in den Observablen festgestellt werden können, inwieweit sind diese Phasen dann überhaupt voneinander unterscheidbar, da die Messgrößen sich aufgrund der Stetigkeit beim Übergang nicht unterscheiden lassen. Die Klassifikation nach Ehrenfest kann folglich verbessert werden. Zumal man im

Experiment feststellt, dass die Suszeptibilitäten in Phasenübergängen 2. Ordnung fast nie endliche Sprünge aufweisen. Vieles deutet dabei auf echte Divergenzen hin, wie in Abb. 2.4 dargestellt ist. Stattdessen ist man heute dazu übergegangen Phasenübergänge nach 1. und nicht 1. Ordnung zu klassifizieren, diese werden dabei als diskontinuierlich oder kontinuierlich in der ersten Ableitung beschrieben.

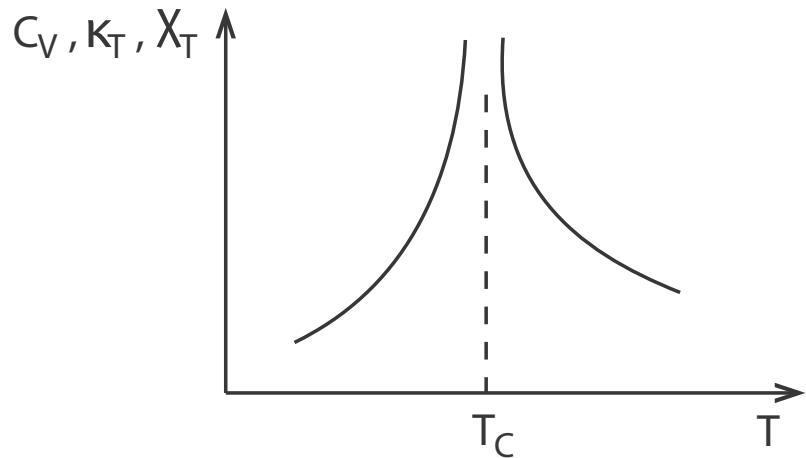


Abbildung 2.4: *Verhalten der Suszeptibilitäten in der Nähe der kritischen Temperatur  $T_C$ , diese zeigen im Experiment häufig den Charakter echter Divergenzen.[2]*

## 2.2 Landau Theorie

Die Landau Theorie ist eine klassische Theorie in der, im Vergleich zur vorherigen Betrachtung, nicht nur die reinen Phasen betrachtet werden. Ziel ist eine vollständige Beschreibung auch im Gebiet der Phasenumwandlung. Dabei ist die volle Information in Form eines thermodynamischen Potentials gegeben, aus diesem können alle Observablen abgeleitet werden. Entweder durch Differenzierung oder durch Legendre-Transformation in eines der anderen Potentiale. Die Landau Theorie geht dabei von einer Potenzreihenentwicklung der freien Enthalpie aus. Als Entwicklungsparameter wird dabei der sogenannte Ordnungsparameter verwendet, der hier zunächst vorgestellt werden soll.

Der Ordnungsparameter ist eine typische Eigenschaft der kontinuierlichen Phasenübergänge, weswegen die Landau Theorie auch nur auf kontinuierliche Phasenübergänge anwendbar ist. Der Ordnungsparameter ist dabei als eine physikalische Größe festgelegt, die nur für eine der reinen Phasen definierbar ist, bzw. deren Erwartungswert nur für eine Phase ungleich Null ist. Beispiele dafür sind die Teilchendichte  $\Delta n = n_F - n_G$  für den Übergang zwischen einem Gas und einer Flüssigkeit, die spontane Magnetisierung  $M_s = m_s/V$  für den Ferromagnet, oder der Higgs-Erwartungswert, der später noch von großer Bedeutung sein wird.

Eine weitere Größe die eng mit der Landau Theorie verbunden ist, ist die Korrelationsfunktion  $g(\vec{r}, \vec{r}')$  und die mit ihr assoziierte Korrelationslänge  $\xi(T)$ .

$$g(\vec{r}, \vec{r}') = \langle x(\vec{r})x(\vec{r}') \rangle - \langle x(\vec{r}) \rangle \langle x(\vec{r}') \rangle$$

Sie stellt eine Korrelation zwischen zwei Orten  $\vec{r}$  und  $\vec{r}'$  bezüglich der physikalischen Größe  $X$  her, dabei beschreibt  $x$  die Dichte der Größe. Sind die betrachteten Orte unkorreliert faktorisiert der erste Erwartungswert und die Korrelationsfunktion ergibt sich zu  $g(\vec{r}, \vec{r}') = 0$ . Für die Korrelationsfunktion findet man ein allgemeingültiges Verhalten im kritischen Bereich:

$$g(\vec{r}, \vec{r}') = c_0 \frac{\exp\{-|\vec{r} - \vec{r}'|/\xi(T)\}}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

dabei ist  $\xi(T)$  die temperaturabhängige Korrelationslänge, die die Reichweite der Korrelation beschreibt. Demnach unkorrelierte Bereiche stehen in keinem physikalischen Zusammenhang und können sich bspw. in verschiedenen Phasen befinden.

Grundlage der Landau-Theorie ist es das Verhalten der freien Enthalpie  $G$  als Funktional des Ordnungsparameters  $\varphi$  oder seiner Dichte  $\Psi(\vec{r})$  darzustellen:

$$\varphi = \int d^3r \Psi(\vec{r}) \begin{cases} = 0 & \text{für } T > T_C \\ \neq 0 & \text{für } T < T_C \end{cases}$$

Ziel ist die vollständige Darstellung im kritischen Bereich. Die Ordnungsparameterdichte geht bei Annäherung an die kritische Temperatur stetig gegen Null

$$\lim_{\substack{T \rightarrow T_C \\ T < T_C}} \Psi(\vec{r}) = 0. \quad (2.1)$$

Dieses Verhalten legitimiert eine Potenzreihenentwicklung der freien Enthalpie bezüglich der Ordnungsparameterdichte.

$$\begin{aligned} G(T, \varphi) &= \int d^3r g(T, \Psi(\vec{r})) \\ &= \int d^3r [g_0(\vec{r}) - \pi(\vec{r})\Psi(\vec{r}) + a(T)\Psi^2(\vec{r}) \\ &\quad + b(T)\Psi^4(\vec{r}) + c(T)(\nabla\Psi(\vec{r}))^2] \end{aligned}$$

Dabei bezeichnet  $\pi(\vec{r})$  die zur Ordnungsparameterdichte konjugierte Kraft, wie etwa die magnetische Induktion  $\vec{B}_0(\vec{r})$  zur Magnetisierung  $\vec{M}(\vec{r})$  beim Ferromagnetischen Phasenübergang.  $g_0(\vec{r})$  steht für die Enthalpedichte oberhalb der kritischen Temperatur. Die Temperaturabhängigkeit wird durch die Funktionen  $a(T), b(T)$  und  $c(T)$

beschrieben. Ist die Ordnungsparameterdichte und die konjugierte Kraft ortsunabhängig, vereinfacht sich die Entwicklung zu:

$$G(T, \varphi) = G(T, \varphi = 0) - \pi\varphi + \frac{1}{V}a(T)\varphi^2 + \frac{1}{V^3}b(T)\varphi^4.$$

Für die Entwicklungskoeffizienten lassen sich einige allgemeine Eigenschaften herleiten, die dann systemspezifisch erweitert werden können. Für konkrete Systeme lassen sich dann die kritischen Exponenten ermitteln, sowie Parameter wie bspw. die Korrelationslänge bestimmen.

# 3 Phasenübergänge im frühen Universum

Nach der klassischen Beschreibung von Phasenübergängen im vorherigen Kapitel soll es nun um die Phasenübergänge im frühen Universum gehen. Insbesondere soll der elektroschwache Phasenübergang behandelt werden. Als Modell wird hierfür die spontane Symmetriebrechung in der  $\phi^4$ -Theorie verwendet, wobei kurz auf den Higgs-Mechanismus eingegangen wird. Zunächst sollen jedoch die grundlegenden Wechselwirkungen des Standardmodells vorgestellt werden, um die Notwendigkeit eines Phasenübergangs im Standardmodell zu erläutern.

## 3.1 Symmetrie und Wechselwirkungen

Die Symmetriegruppe, die die fundamentalen Wechselwirkungen beschreibt, ist ein direktes Produkt aus den Symmetriegruppen der einzelnen Wechselwirkungen, bei denen es sich um Lie-Gruppen handelt.

$$SU(3)_C \times (SU(2) \times U(1))_{EW}$$

Für diese gilt, dass sich die Transformation der Felder durch eine Exponentialfunktion darstellen lassen. In dieser Transformation sind die Kopplungsstärke der Wechselwirkung  $g$ , die Erzeugenden der Transformation  $J_l$  und die Parameter der Lie-Gruppe  $\chi^l$  enthalten. So beschreibt die  $SU(2)$ , die spezielle unitäre Gruppe, eine Drehung im dreidimensionalen und ist auch aus der Quantenmechanik als Spin-Gruppe bekannt. Sie wird durch unitäre  $2 \times 2$ -Matrizen erzeugt, deren Determinante eins ist und besitzt  $m = 3$  unabhängige gruppenspezifische Parameter, die Drehwinkel. Erzeugende der Gruppe sind die Paulimatrizen. Explizit gilt für eine solche Transformation:

$$\Psi(x) \rightarrow \Psi'(x) = e^{ig \sum_{l=1}^m J_l \chi^l} \Psi(x)$$

Eine Schwierigkeit bei der Beschreibung der Wechselwirkungen bildet die Tatsache, dass sowohl die  $SU(3)$ - als auch die  $SU(2)$ -Gruppe nicht abelsche Lie-Gruppen sind, dies bedeutet einfach, dass die Generatoren (Erzeuger) der Gruppe nicht vertauschen. An dieser Stelle soll nicht zu sehr ins Detail gegangen werden, es sei lediglich erwähnt, dass für die Beschreibung die Yang-Mills Theorie benötigt wird. Die entscheidende Forderung ist nun, dass die Lagrangedichte  $\mathcal{L}$  des Standardmodells invariant unter den Symmetrietransformationen sein soll. Es muss also eine

Eichtheorie entwickelt werden, die die Lagrangedichte invariant lässt und die Eigenschaften der Wechselwirkungen erfüllt. Grundsätzlich sind zwei verschiedene Eichtheorien bekannt: globale bei denen die Phase  $\chi$ , beziehungsweise der Parameter eine globale Größe ist, also überall im System gleich und lokale, bei denen  $\chi(x)$  ortsabhängig ist. Für Wechselwirkungen ist lediglich eine lokale Eichtheorie realisierbar, so kann eine Wechselwirkung im System nicht instantan zu einer Phasenänderung im gesamten System führen, da der Informationsaustausch durch die Lichtgeschwindigkeit limitiert ist. Fordert man nun die Invarianz des Systems unter diesen lokalen Eichtransformationen wird dies in der Yang-Mills Theorie durch das Prinzip der minimalen Kopplung erreicht. Dabei wird die Ableitung  $\partial_\mu$  durch die Kovariante Ableitung  $D_\mu$  ersetzt:

$$\partial_\mu \rightarrow D_\mu = \partial_\mu + ig \sum_{l=1}^m J_l W_\mu^l(x)$$

$$A_\mu(x) \equiv \sum_{l=1}^m J_l W_\mu^l(x)$$

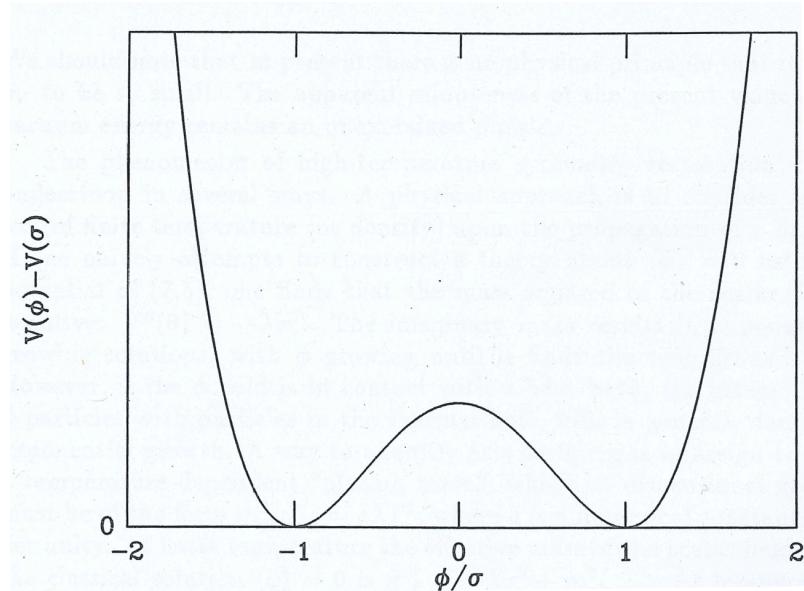
Dabei ist  $A_\mu(x)$  ein Vierervektorfeld, das aufgrund der lokalen Phase eingeführt werden muss, um Invarianz zu garantieren. Die  $m$  Komponenten  $W_\mu^l(x)$  von  $A_\mu(x)$  sind Spin-1 Bosonfelder und heißen Yang-Mills-Felder. Sie stellen die nicht-abelsche Verallgemeinerung des elektromagnetischen Vektorpotentials dar. Entsprechend der Parameter der Lie-Gruppen gibt es drei Yang-Mills-Felder in der schwachen Wechselwirkung, dies sind die drei Bosonen  $W^\pm$  und  $Z^0$ , in der Starken Wechselwirkung sind es die acht Gluonen. Diese Felder vermitteln die fundamentalen Wechselwirkungen und sind im Standardmodell zwingend masselos, da ansonsten die Invarianz verletzt würde. Im Experiment stellt man nun jedoch fest, dass die Eichbosonen der schwachen Wechselwirkung Masse besitzen. Es wird also ein Prozess benötigt der den Eichbosonen Masse verleiht, dieser wurde in Form der spontanen Symmetriebrechung bzw. des Higgs-Mechanismus gefunden.[3]

### 3.1.1 Spontane Symmetriebrechung

In diesem Abschnitt soll nun der Mechanismus der spontanen Symmetriebrechung im  $\phi^4$ -Modell behandelt werden. Die entsprechende Lagrangedichte wird aus einem kinetischen Term und einem  $\phi^4$ -Potential zusammengesetzt, welches in Abbildung 3.1 dargestellt ist.

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - V(\phi)$$

$$V(\phi) = -\frac{1}{2} m^2 \phi^2 + \frac{1}{4} \lambda \phi^4$$

Abbildung 3.1: Potential, dass in der  $\phi^4$  Theorie verwendet wird.[4]

Offensichtlich ist der symmetrische Grundzustand mit  $\phi = 0$  instabil, da er im Potential ein Maximum annimmt. Während zwei stabile Zustände ausgemacht werden können mit  $\phi = \sigma_{\pm} = \pm\sqrt{\frac{m^2}{\lambda}}$ , die im Minimum des Potentials liegen. Eine quantenmechanische Theorie kann allerdings nur um einen stabilen Grundzustand konstruiert werden, da nur dann die Energie tatsächlich minimal ist. Ein Teilchen in diesem Potential wird folglich immer in einen der stabilen Zustände bei  $\phi = \sigma_{\pm}$  übergehen. Während das Potential invariant unter der diskreten Transformation  $\phi \rightarrow -\phi$  ist, sind es die stabilen Grundzustände des Systems nicht. Besitzt der stabile Grundzustand in dem sich ein Teilchen befindet nicht die gleiche Symmetrie wie das zugrundeliegende Potential spricht man von spontaner Symmetriebrechung. Gleichzeitig ergibt sich in einer solchen Theorie ein massives Teilchen, dessen Masse mit der Krümmung des Potentials assoziiert wird:

$$M^2 = \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} V(\phi) \Big|_{\sigma_{\pm}} = 2m^2 = 2\lambda\sigma_{\pm}.$$

Für einen Phasenübergang im frühen Universum ist die Forderung nach einem temperaturabhängigen Mechanismus angemessen, in dem sich ein Phasenübergang beim abkühlen des Universums ereignet. Im Folgenden wird daher das Verhalten dieses Mechanismus unter einbeziehen der Temperatur betrachtet und im speziellen die Wiederherstellung der Symmetrie bei hohen Temperaturen. Betrachtet man die Energiedichte des unsymmetrischen Vakuums  $\phi = \langle \phi \rangle = \sigma_{\pm}$  über die  $T_{00}$  Komponente des Energie-Impuls-Tensor

$$T_{\mu\nu} = \partial_{\mu}\phi\partial_{\nu}\phi - \mathcal{L}g_{\mu\nu} \quad \langle T_{00} \rangle = -\frac{m^4}{4\lambda} \equiv \rho_V$$

und vergleicht die Expansionsrate des Universums mit der berechneten Energiedichte liefert dies eine obere Grenze von

$$\rho_V < 10^{-46} \text{ GeV}^4 \approx 0.$$

Um die Energiedichte in der Näherung auf Null zu bringen wird der zusätzliche Term  $\frac{m^4}{4\lambda}$  in das Potential eingebracht. Das normierte Potential lässt sich dann schreiben als:

$$V(\phi) = \frac{\lambda}{4}(\phi^2 - \sigma^2)^2.$$

Um anhand dieses Potentials nun den Einfluss endlicher Temperatur zu studieren wird die Wechselwirkung des Systems mit einem Wärmebad betrachtet. Geht man naiver Weise vom instabilen symmetrischen Zustand  $\langle\phi\rangle = 0$  aus und konstruiert von dort ausgehend die Theorie, führt das auf Teilchen mit einer imaginären Masse  $M^2 = V''(\phi = 0) = -\lambda\sigma^2$ . Löst man nun die Euler-Lagrange Gleichungen für das System führt dies auf exponentiell anwachsende Lösungen von  $\phi$ , die sich bei den Werten  $\langle\phi\rangle = \sigma_{\pm}$  stabilisieren. Ein Wärmebad führt grundsätzlich zu dämpfenden Termen in  $\phi$ , dem soll hier durch einfügen einer temperaturabhängigen Plasma Masse Rechnung getragen werden

$$m_{Plasma}^2 = a\lambda T^2.$$

Für  $\langle\phi\rangle = 0$  ergibt sich dann eine Gesamtmasse von

$$m_T^2 = -\lambda\sigma^2 + m_{Plasma}^2 = \lambda(aT^2 - \sigma^2).$$

Für diese temperaturabhängige Gesamtmasse lassen sich nun zwei verschiedene Bereiche ausmachen. Bei kleinen Temperaturen ist  $m_T^2 < 0$ , die Masse somit komplex und  $\langle\phi\rangle = 0$  ist der instabile Grundzustand. Es findet folglich eine spontane Symmetriebrechung im System statt. Für hohe Temperaturen gilt  $m_T^2 > 0$  die Masse ist demnach reell und  $\langle\phi\rangle = 0$  ist der stabile Grundzustand. Es lässt sich nun im System eine kritische Temperatur  $T_C = \frac{\sigma}{\sqrt{a}}$  ausmachen, bei der der Phasenübergang stattfindet, das Temperaturabhängige Potential ist in Abbildung 3.2 gezeigt. Man sieht deutlich die Wiederherstellung der Symmetrie bei großen Temperaturen und der Übergang in das bekannte  $\phi^4$ -Potential bei kleinen Temperaturen.

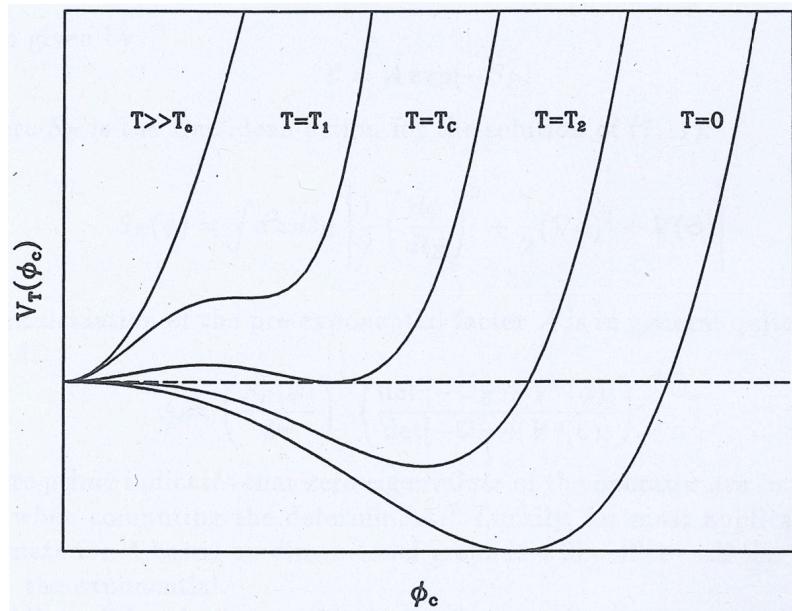


Abbildung 3.2: Potential aus der  $\phi^4$ -Theorie, das sich nach der Wechselwirkung mit einem Wärmebad ergibt.[4]

## 3.2 Elektroschwacher Phasenübergang

In diesem Abschnitt soll nun der elektroschwache Phasenübergang im Higgs-Mechanismus betrachtet werden. Der Phasenübergang entspricht der spontanen Symmetriebrechung der Symmetriegruppe der elektroschwachen Wechselwirkung in die  $U(1)$ -Symmetrie der elektromagnetischen Wechselwirkung.

$$(SU(2) \times U(1))_{EW} \rightarrow U(1)_{EM}$$

Statt einer skalaren Theorie muss aufgrund der  $SU(2)$ -Symmetrie nun ein Dublett betrachtet werden, welches wiederum aus komplexen Komponenten aufgebaut werden muss, um die  $U(1)$ -Symmetrie zu erfüllen. Die einfachste Darstellung besteht daher aus vier reellen skalaren Feldern, die in einem komplexen Dublett zusammengefasst werden

$$\Phi = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \phi_1 + i\phi_2 \\ \phi + i\phi_2 \end{pmatrix}$$

$$V(\Phi) = -m^2 \Phi^\dagger \Phi + \lambda (\Phi^\dagger \Phi)^2$$

Das Potential entspricht dem bereits diskutierten, ist allerdings aufgrund der größeren Anzahl an Freiheitsgraden etwas komplizierter. Es ist in Abbildung 3.3 für zwei der skalaren Feldkomponenten dargestellt, offensichtlich besitzt dieses Potential eine unendliche Anzahl an stabilen Grundzuständen, die sich alle durch eine Phase

unterscheiden. Die beliebige Wahl des Vakuumzustands erlaubt es das Potential auf die bekannte Form

$$V(\phi) = -\frac{1}{2}m^2\phi^2 + \frac{1}{4}\lambda\phi^4$$

zu reduzieren.

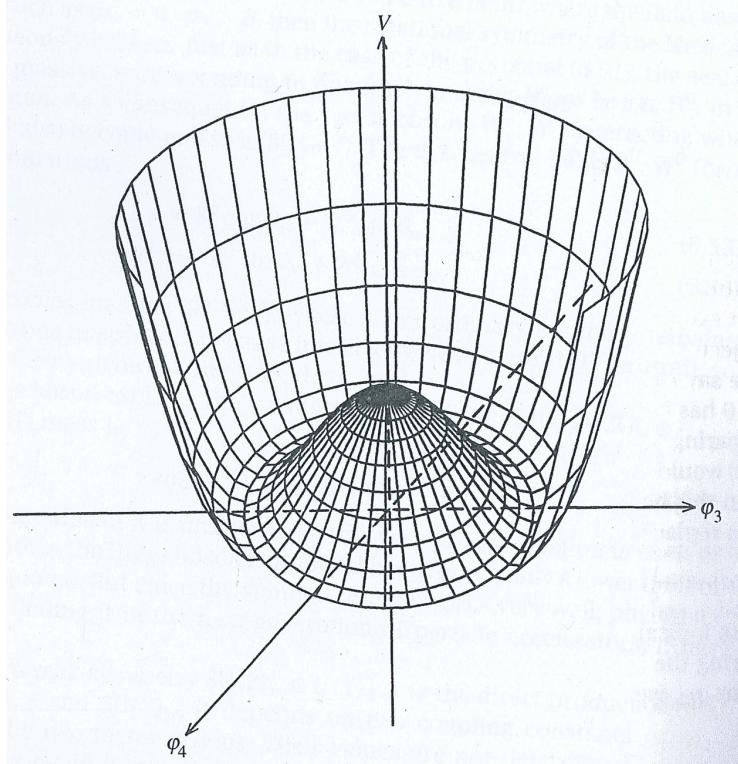


Abbildung 3.3: *Mexican-Hat Potential, dass für die spontane Symmetriebrechung im elektroschwachen Phasenübergang verwendet wird.* [5]

Die Higgs-Masse ergibt sich in diesem Fall wieder aus der Krümmung des Potentials

$$M_H^2 = V''(\phi = \sigma_{\pm})$$

Das Higgs-Feld selbst geht neben der Selbstwechselwirkung über Wechselwirkungs-terme mit den Yang-Mills-Feldern in die Lagrangedichte des Standardmodells ein. Die Eichfelder erhalten dabei die gleiche Masse, die Tatsache dass die Eichbosonen der schwachen Wechselwirkung unterschiedliche Massen besitzen ist auf die Tatsache zurückzuführen, dass die Masseneigenzustände nicht mit den Eichbosonen der elektroschwachen Wechselwirkung übereinstimmen. An dieser Stelle sei nur auf das Glashow-Weinberg-Salam Modell hingewiesen. Dieses Mischen der ursprünglichen Bosonen ist auch der Grund dafür, dass das  $Z^0$ -Boson nicht maximal paritäts-verletzend ist und sich die schwache Wechselwirkung nicht nur auf linkshändige

Teilchen beschränkt. Die Fermionen erhalten ihre Masse dadurch, dass ein eichinvarianter Wechselwirkungsterm zwischen den Fermionfeldern und dem Higgsfeld in die Lagrangedichte eingebracht wird, die theoretische Beschreibung wird durch die Yukawa-Wechselwirkung geleistet. Dementsprechend sind die zugeordneten Massen der Eichbosonen:

$$\begin{aligned} M_W^2 &= \frac{1}{4}g^2\sigma^2 \\ M_Z^2 &= \frac{1}{4}(g^2 + g'^2)\sigma^2 \\ M_f^2 &= \frac{1}{2}h_f^2\sigma^2 \end{aligned}$$

Wobei  $g$  die Kopplungskonstante der  $SU(2)$ -Symmetrie,  $g'$  die Kopplungskonstante der  $U(1)$ -Symmetrie und  $h_f$  die Yukawa Kopplungskonstante ist. Betrachtet man nun die Art des Phasenübergangs in Abhängigkeit der Higgsmasse in einem temperaturabhängigen Higgspotential, welches die One-Loop Beiträge einbezieht, stellt man fest, dass für kleine Higgsmassen der Phasenübergang stark erster Ordnung ist. Dies geht für größere Higgsmassen in einen Phasenübergang zweiter Ordnung über. Für eine Masse von  $M \approx 125 \text{ GeV}/c^2$ , welche am CERN gemessen wurde, ergibt sich ein Phasenübergang, der eher die Charakteristik eines cross-over zeigt.

Man vermutet im frühen Universum weitere Phasenübergänge, wie etwa der Phasenübergang in der QCD, der zum ausfrieren und Confinement der Quarks geführt hat. An dieser Stelle soll allerdings nicht näher auf weitere Phasenübergänge eingegangen werden, sondern mögliche Relikte dieser Phasenübergänge diskutiert werden.

### 3.3 Topologische Defekte

Topologische Defekte sind mögliche Relikte früher Phasenübergänge im heißen Universum, dabei sollen die drei wichtigsten kurz diskutiert werden.

#### 3.3.1 Domain Walls

Domain Walls sind zweidimensionale Objekte die bei der spontanen Symmetriebrechung einer diskreten Symmetrie entstehen. In der skalaren  $\phi^4$ -Theorie mit dem Potential

$$V(\phi) = -\frac{1}{2}m^2\phi^2 + \frac{1}{4}\lambda\phi^4$$

ist die Phase des Vakuumzustands unbestimmt mit  $\langle\phi\rangle = \sigma_- \leftrightarrow \langle\phi\rangle = \sigma_+$ . Findet nun eine spontane Symmetriebrechung in Bereichen statt, die weiter als eine Korrelationslänge voneinander entfernt sind, bildet sich die Phase des Vakuums unabhängig voneinander aus. Diese Phase muss zwischen den beiden Gebieten dann

stetig von einer in die andere Phase übergehen. Zwischen diesen Gebieten bildet sich dann zwingend eine Domain Wall aus, ein zwei dimensionales Gebilde, das sich noch im instabilen Vakuumzustand befindet. Ein solcher Zusammenhang ist in Abbildung 3.4 dargestellt. Problematisch sind Domain-Walls wenn man die mit ihnen assoziierte Energiedichte betrachtet, die nicht mit der beobachtbaren Kosmologie vereinbar ist. Da Domain-Walls keine effektiven Mechanismen besitzen um zu zerstrahlen.

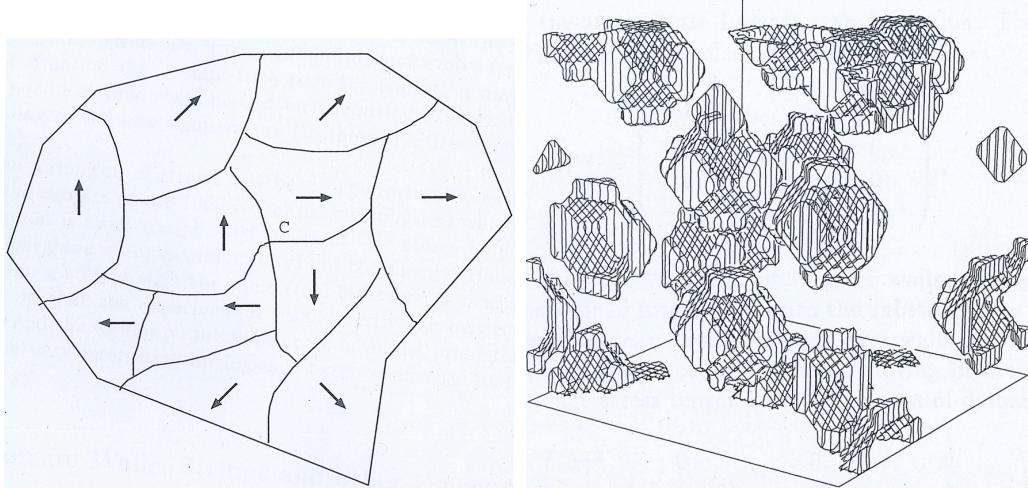


Abbildung 3.4: *links: Gebiete verschiedener Phasen sind durch eine Domain-Wall getrennt. rechts: Simulation einer Entwicklung von Domain-Walls nach einer Symmetriebrechung.*

### 3.3.2 Cosmic Strings

Cosmic Strings entstehen bei einer gebrochenen  $U(1)$ -Eichsymmetrie, die unbestimmte Phase lässt sich hierbei durch  $\langle\phi\rangle \propto \exp(i\Theta)$  beschreiben. Betrachtet man die Phase in einem geschlossenen Kreis muss diese sich auch hier stetig ändern, verkleinert man diesen Kreis auf einen Punkt ergibt sich in diesem Fall ein einzelner Punkt, der sich im instabilen Grundzustand befindet. Erweitert man diese Vorstellung ins dreidimensionale ergeben sich eindimensionale Objekte, die Cosmic-Strings. Diese Cosmic-Strings können nur in geschlossener Form auftreten, d.h. entweder sind diese unendlich lang und reichen von einem Ende des Universums zum Anderen oder sie sind in Schleifen abgeschlossen. Im Gegensatz zu den Domain-Walls stellen diese Objekte keinen Widerspruch zur Kosmologie dar. Auch mit ihnen ist eine große Energiedichte assoziiert, allerdings besitzen sie effektive Mechanismen um Energie zu verlieren bzw. ganz zu zerstrahlen. Sie besitzen im Inneren eine gewisse Spannung wie etwa eine Feder oder ein Gummiband, bei Schleifen führt dies zum zusammenziehen der Struktur. Unter Oszillation und aussenden von Gravitationswellen können kleine Schleifen zerstrahlen. Während gerade Strings durch Kreuzungen und Begradiung Energie verlieren. Sie könnten zudem ein wichtiger Bestandteil der Strukturbildung im frühen Universum sein. Eine Simulation von Cosmic Strings ist in Abbildung 3.5

gezeigt.

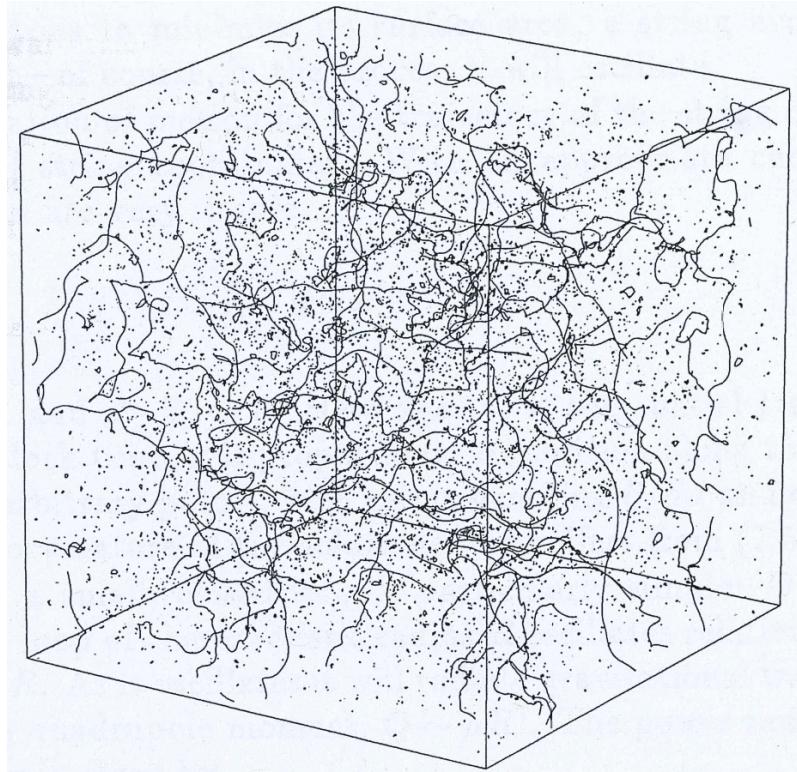


Abbildung 3.5: *Simulation von Cosmic Strings nach einer Symmetriebrechung.* [4]

### 3.3.3 Monopole

Monopole können entstehen wenn eine  $SO(3)$ -Symmetrie in eine  $U(1)$ -Symmetrie gebrochen wird. In einer solchen Symmetriebrechung ist es möglich, dass sich nicht eichbare Vektorfelder entwickeln. Die Monopole entsprechen dann der sogenannten Hedgehog Konfiguration, die einem magnetischen Monopol entspricht und in Abbildung 3.6 dargestellt ist. Auch sie widersprechen der beobachtbaren Kosmologie, da sie keinen effektiven Mechanismus besitzen, der es ihnen erlaubt zu zerstrahlen. Einen möglichen Ausweg bietet ein Phasenübergang im extrem frühen Universum. Die Anzahl von Monopolen und Domain-Walls ist durch die Korrelationslänge bestimmt und der aktuellen Größe des Systems. Eine Inflationsphase nach dem Phasenübergang würde dazu führen, dass die Dichte dieser Defekte deutlich unter einem kritischen Bereich läge, da diese sich nur während des Phasenübergangs ausbilden können. Bis heute sind noch keine Topologischen Defekte beobachtet worden, man sucht jedoch aktiv nach bspw. gravitativen Linseneffekten dieser Objekte, da ein Fund die Bestätigung für Phasenübergänge im frühen Universum liefern würde.

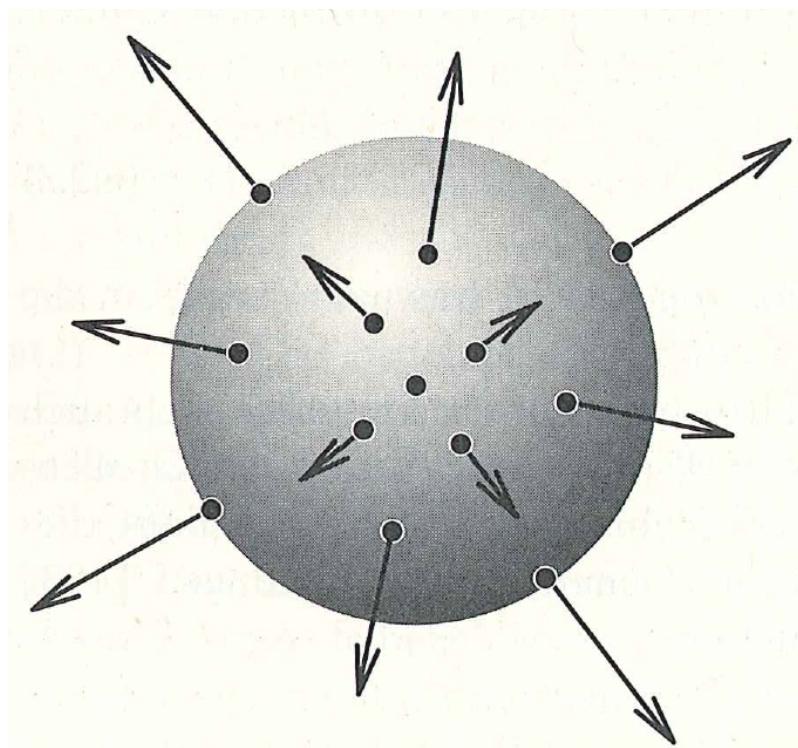


Abbildung 3.6: *Hedgehog Konfiguration eines magnetischen Monopols.* [6]

## 4 Fazit

Phasenübergänge sind ein in der Physik weit verbreitetes Phänomen, die grundsätzlich in zwei Klassen, die kontinuierlichen und diskontinuierlichen Phasenübergänge, eingeteilt werden können. Die Minimierung der freien Enthalpie  $G$  liefert dabei den Antrieb des Phasenübergangs. Soll eine vollständige Beschreibung geliefert werden, muss die Betrachtung der reinen Phasen erweitert werden. Im kritischen Bereich liefert nach der Landau-Theorie die Beschreibung der freien Enthalpie als Funktional des Ordnungsparameters die vollständige Information des Systems. Diese allgemeine Betrachtung kann im Rahmen der spontanen Symmetriebrechung auf Phasenübergänge im frühen Universum erweitert werden, die durch die Notwendigkeit eines stabilen Grundzustands getrieben sind. Dieser Mechanismus kann für den explizit behandelten elektroschwachen Phasenübergang auf den Higgs-Mechanismus verallgemeinert werden, der auf die Massenzuordnung der schwachen Eichbosonen führt. Mit ziemlicher Sicherheit wurde der elektroschwache Phasenübergang durch die Entdeckung des Higgs-Bosons bestätigt, Hinweise auf weitere Phasenübergänge im frühen Universum sind bisher nicht gefunden worden. Die vorgestellten Topologischen Defekte sind mögliche Relikte dieser Übergänge nach denen heute aktiv gesucht wird.

# Literaturverzeichnis

- [1] W. Nolting, *Grundkurs Theoretische Physik 4 - Spezielle Relativitätstheorie, Thermodynamik*, Springer, Berlin(2012)
- [2] W. Nolting, *Grundkurs Theoretische Physik 6 - Statistische Physik*, Springer, Berlin(2005)
- [3] C. Falter, Vorlesung und Skript: *Symmetrie und Physik*, Münster (2015)
- [4] E. W. Kolb, M.S. Turner, *The Early Universe*, Addison-Wesley, Massachusetts (1990)
- [5] M. Roos, *Introduction to Cosmology*, John Wiley & Sons, Chichester (2003)
- [6] A. Linde, *Elementarteilchen und inflationärer Kosmos*, Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg (1990)
- [7] L. Bergström, A. Goobar, *Cosmology and Particle Astrophysics*, Springer, Berlin (2006)