

Ausarbeitung

Friedmann-Robertson-Walker-Metrik und Friedmann-Gleichungen

Christian Schwermann
c.schwermann@wwu.de

12.11.2014



Seminar zur Theorie der Teilchen und Felder

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Grundlagen	1
2.1	Mathematischer Hintergrund	1
2.2	Physikalischer Hintergrund	5
3	Friedmann-Robertson-Walker-Metrik	7
3.1	Herleitung	7
3.2	Folgerungen	10
4	Friedmann-Gleichungen	12
4.1	Herleitung	12
4.2	Folgerungen	14
5	Zusammenfassung	18
	Literatur	19

1 Einleitung

Für ein allgemeines Verständnis der Kosmologie ist eine hinreichende theoretische Grundlage von Nöten. Insbesondere gehören dazu neben der allgemeinen Relativitätstheorie auch die Grundzüge des Standardmodells der Kosmologie. In dieser Ausarbeitung werden zunächst die mathematischen Notwendigkeiten, wie Mannigfaltigkeiten und riemannsche Metriken, beispielhaft erläutert. Daraufhin werden die physikalischen Grundlagen der allgemeinen Relativitätstheorie kurz umrissen. Mit den nun vorhandenen Kenntnissen und einer guten Annahme über das Wesen des Universums, dem kosmologischen Prinzip, wird die Friedmann-Robertson-Walker-Metrik hergeleitet, mit der die Einstein-Gleichung vereinfacht und eine analytische Lösung ermöglicht wird.

Unter den Ergebnissen finden sich viele bekannte Phänomene der Kosmologie, wie der Urknall, die Rotverschiebung und das Hubble-Gesetz. Dabei ist die Übereinstimmung mit experimentellen Messungen beeindruckend. Zusätzlich ergeben sich aber auch weitere offene Fragen, zu deren Beantwortung die bekannte Physik womöglich nicht ausreicht.

2 Grundlagen

2.1 Mathematischer Hintergrund

Im Folgenden werden die mathematischen Grundkenntnisse vermittelt, die zum Verständnis der Friedmann-Robertson-Walker-Metrik benötigt werden. Dazu werden die mathematischen Begriffe am Beispiel der 2-Sphäre S^2 eingeführt und erläutert. Die 2-Sphäre ist die zweidimensionale Oberfläche einer Kugel mit dem Radius R und kann durch folgende Formel beschrieben werden:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = R^2.$$

Es handelt sich hierbei um eine zweidimensionale Untermannigfaltigkeit des \mathbb{R}^3 . Allgemein ist eine **n -dimensionale Untermannigfaltigkeit** bestimmt durch eine Submersion $f : U \subset \mathbb{R}^{n+k} \rightarrow \mathbb{R}^k, f(x) = 0$, wobei Submersion lediglich bedeutet, dass $df : \mathbb{R}^{n+k} \rightarrow \mathbb{R}^k$ surjektiv sein muss. Im Beispiel der 2-Sphäre ist diese Funktion $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, f(\vec{x}) = R^2 - |\vec{x}|^2$. und man erkennt deutlich, dass die Dimension hier $n = 3 - 1 = 2$ sein muss.

Untermannigfaltigkeiten sind in der Mathematik lediglich Spezialfälle von **abstrakten Mannigfaltigkeiten**. Dies sind lokal euklidische topologische Räume und damit Strukturen, die wesentlich allgemeiner gehalten sind als zum Beispiel Vektorräume. Damit ist es auch nicht selbstverständlich, dass hier Begriffe wie Differenzierbarkeit klar definiert sind. Jedoch ermöglicht die Tatsache, dass Mannigfaltigkeiten lokal euklidisch sind genau solche Definitionen, da Mannigfaltigkeiten lokal dem \mathbb{R}^n gleichen müssen und so das Differential auf Tangentialräumen an jedem Punkt der Mannigfaltigkeit definiert werden kann.

Im Beispiel der zwei Sphäre wurden hier drei Koordinaten, x_1, x_2 und x_3 verwendet. Dies ist zwar bei Untermannigfaltigkeiten möglich und gerechtfertigt, jedoch nicht unbedingt praktisch. Es bietet sich an, **intrinsische Koordinaten** einzuführen, die die Struktur der Mannigfaltigkeit und insbesondere ihre Dimension berücksichtigen. In diesem Fall sind dies einfach die Kugelkoordinaten:

$$x_1 = R \sin \frac{r}{R} \cos \phi, \quad x_2 = R \sin \frac{r}{R} \sin \phi, \quad x_3 = R \cos \frac{r}{R},$$

wobei hier der Winkel θ durch $r = R\theta$ ersetzt wurde. In der folgenden Abbildung ist skizziert, wie diese Koordinaten zu verstehen sind.

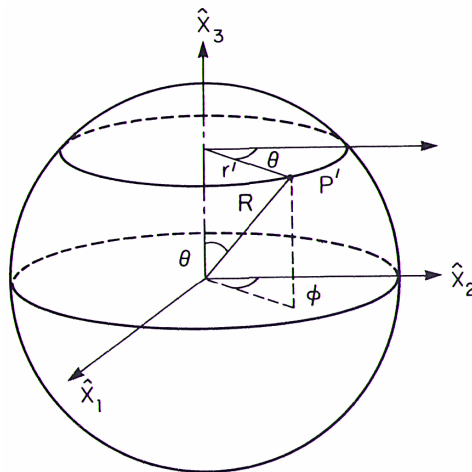


Abbildung 1 – Ein Punkt auf der 2-Sphäre [1]

Der Nutzen von intrinsischen Koordinaten wird am Beispiel der Geographie ersichtlich: betrachtet man die Erdoberfläche als 2-Sphäre, so ist r ein Abstand, der sich tatsächlich auf der Oberfläche messen lässt, während die x_i extern festgelegt werden müssten und

praktisch nicht zu messen wären.

Um auf Mannigfaltigkeiten Abstände messen zu können, wird das **Linienelement** eingeführt. Im Fall der 2-Sphäre sieht es folgendermaßen aus:

$$ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2.$$

Einsetzen der intrinsischen Koordinaten ergibt:

$$\begin{aligned} ds^2 &= dr^2 + R^2 \sin^2 \frac{r}{R} d\phi^2 \\ &= (dr, d\phi) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R^2 \sin^2 \frac{r}{R} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} dr \\ d\phi \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Die Matrix, die sich so ergibt, ist eine Darstellung der **Metrik**. Diese Darstellung ähnelt der bekannten Form des metrischen Tensors zum Beispiel im Minkowski-Raum, die dort eine Diagonalmatrix $\text{diag}(1, -1, -1, -1)$ ist. Allgemein gilt:

$$\begin{aligned} ds^2 &= g_{ij} dx^i dx^j \\ g_{ij} &= \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j, \end{aligned} \tag{2.1}$$

die Metrik lässt sich also auch als Produkt der Einheitsvektoren schreiben.

Wichtig für die weiteren Rechnungen ist auch das schon erwähnte Problem der Ableitung. Die notwendige Vektorraumstruktur ist auf Mannigfaltigkeiten nicht vorhanden, weshalb auf die Tangentialvektorräume der jeweiligen Punkte zurückgegriffen werden muss. Da die Ableitung jedoch prinzipiell über Differenzen definiert ist und ein Tangentialvektorraum nur an jeweils einem Punkt der Mannigfaltigkeit definiert ist, ergeben sich weitere Komplikationen. Ohne allzu genau auf die Mathematik einzugehen, wird hier die **kovariante Ableitung** gegeben:

$$T_{;\mu}^{\mu\nu} = T_{,\mu}^{\mu\nu} + \Gamma_{\mu\sigma}^{\mu} T^{\sigma\nu} + \Gamma_{\rho\sigma}^{\nu} T^{\rho\sigma}. \tag{2.2}$$

Neben der gewöhnlichen Ableitung $T_{,\mu}^{\mu\nu} = \partial_{\mu} T^{\mu\nu}$ treten weitere Terme auf, die über die **Christoffel-Symbole**

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = \frac{1}{2} g^{\lambda\rho} (\partial_{\nu} g_{\mu\rho} + \partial_{\mu} g_{\nu\rho} + \partial_{\rho} g_{\mu\nu})$$

den Paralleltransport der Tangentialvektoren in einen gemeinsamen Raum beschreiben. Zuletzt soll nun erläutert werden, wie mithilfe der Metrik ein Verständnis von Abständen und insbesondere kürzesten Wegen definiert werden kann. Der Weg ist das Integral über das Linienelement, das per Substitution nach σ parametrisiert werden kann:

$$s = \int ds = \int \frac{ds}{d\sigma} d\sigma$$

Da jedoch mit Gleichung (2.1) nur eine Formel für ds^2 vorhanden ist, wird die Wurzel gezogen:

$$\int \sqrt{\left(\frac{ds}{d\sigma}\right)^2} d\sigma = \int L d\sigma,$$

wobei hier die „Lagrangefunktion“

$$L(x, \dot{x}) = \sqrt{g_{ij} \frac{dx^i}{d\sigma} \frac{dx^j}{d\sigma}}, \quad \dot{x} = \frac{dx}{d\sigma}$$

definiert wird. Zwar ist diese nur ein mathematisches Analogon zur Lagrangefunktion, die aus der klassischen Mechanik bekannt ist, jedoch ergibt sich die **Geodäte**, also der kürzeste Weg ganz analog durch Variation und es ergeben sich auch hier die Euler-Lagrange-Gleichungen

$$\frac{d}{d\sigma} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} - \frac{\partial L}{\partial x^i} = 0$$

Da die Wurzel die Berechnungen verkompliziert, wird mit der Lagrangefunktion

$$L'(x, \dot{x}) = g_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j$$

weitergerechnet. Es lässt sich zeigen, dass die resultierenden Euler-Lagrange-Gleichungen dieselbe Form haben. Mit

$$\frac{\partial L'}{\partial \dot{x}^i} = 2g_{ij} \dot{x}^j, \quad \frac{\partial L'}{\partial x^i} = \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i} \dot{x}^k \dot{x}^l$$

lautet die **Geodäten-Gleichung**:

$$\frac{d}{d\sigma} g_{ij} \dot{x}^j - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i} \dot{x}^k \dot{x}^l \quad (2.3)$$

Dies ist eine zentrale Gleichung der allgemeinen Relativitätstheorie, denn sie beschreibt, wie die Krümmung des Raumes die Bewegung von Partikeln, beziehungsweise Massen diktiert.

2.2 Physikalischer Hintergrund

Die Grundlage der Relativitätstheorie bildet das **Äquivalenzprinzip**:

Die Physik in einem Bezugssystem im freien Fall ist die gleiche wie in einem Bezugssystem ohne Gravitation.

Die folgende Formulierung ist gleichbedeutend:

Die Physik in einem ruhenden Bezugssystem mit Gravitation ist die gleiche wie in einem beschleunigten Bezugssystem ohne Gravitation.

Dieses Prinzip lässt sich einfach am Beispiel von Fahrstühlen verdeutlichen: eine Beschleunigung lässt sich im Inneren nicht von einer Änderung der Gravitation unterscheiden. Die Bedeutung für die Physik ist enorm; beschleunigte Bezugssysteme sind nur Inertialsysteme mit Gravitation!

Ein weiteres Beispiel ist die Krümmung von Lichtstrahlen:

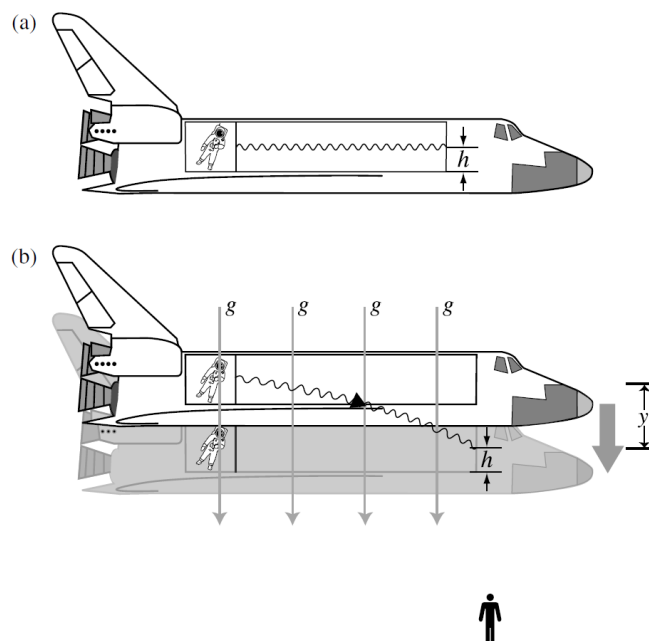


Abbildung 2 – Krümmung von Lichtstrahlen in beschleunigten Bezugssystemen [2]

Angenommen das Space Shuttle fällt in einem Gravitationsfeld senkrecht nach unten. Der vom Astronauten emittierte Lichtstrahl bewegt sich im mitbewegten Bezugssystem gerade und trifft auf die Wand. Ein externer Beobachter sieht jedoch, wie das Space Shuttle sich nach unten bewegt. Da der Lichtstrahl jedoch im fallenden Shuttle auf gleicher Höhe auftreffen muss, sieht man eine gekrümmte Bahn des Lichtstrahls. Diese Krümmung durch die Gravitation führte zu der Überlegung, dass Gravitation und Raumkrümmung untrennbar miteinander verknüpft sein müssen. Diese Überlegung sowie die Erkenntnisse der speziellen Relativitätstheorie werden nun auf das Newtonsche Gravitationspotential angewandt:

$$\nabla^2 \Phi = 4\pi G \rho \quad (2.4)$$

Aus der speziellen Relativitätstheorie ist bekannt, dass die Massedichte ρ mit der Energie und dem Impuls verknüpft ist. Als Quelle auf der rechten Seite der Gleichung (2.4) wird nun also der **Energie-Impuls-Tensor** verwendet. Dessen 00-Komponente ist die Energiedichte, die übrigen $i0$ -Komponenten Energieströme, die $0k$ -Komponenten zeitliche Impulsänderungen und die übrigen Komponenten räumliche Impulsströme.

Das Gravitationspotential Φ auf der linken Seite von (2.4) wird nun durch die Raumkrümmung ersetzt. Für diese wird der **Einstein-Tensor** definiert:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \mathcal{R}.$$

Er setzt sich zusammen aus dem **Ricci-Tensor** $R_{\mu\nu}$ und dessen Kontraktion, dem **Ricci-Skalar** \mathcal{R} . Der Ricci-Tensor ist wiederum eine Kontraktion des **Riemannschen Krümmungstensors**, der sich wiederum aus den Christoffel-Symbolen (2.1) zusammensetzt:

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu\sigma}^{\lambda} &= \partial_{\nu} \Gamma_{\mu\sigma}^{\lambda} - \partial_{\sigma} \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} + \Gamma_{\mu\sigma}^{\eta} \Gamma_{\eta\nu}^{\lambda} - \Gamma_{\mu\nu}^{\eta} \Gamma_{\eta\sigma}^{\lambda} \\ R_{\mu\nu} &= \pm R_{\mu\lambda\nu}^{\lambda} \\ \mathcal{R} &= g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \end{aligned}$$

Damit lautet nun die **Einstein-Gleichung** folgendermaßen:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \mathcal{R} = 8\pi G T_{\mu\nu} \quad (2.5)$$

Gemäß dieser Motivation ist es prinzipiell auch möglich, eine weitere Konstante, multipliziert mit der Metrik $g_{\mu\nu}$ hinzuzufügen. Diese Idee hatte schon Einstein verfolgt, um in seinem Modell ein statisches Universum zu ermöglichen. Da die Evidenz jedoch klar dagegen spricht, bezeichnete er diese **kosmologische Konstante** Λ als „größte Eselei seines Lebens“. Inwiefern diese Konstante möglicherweise dennoch sinnvoll sein kann (im Sinne einer Vakuumenergie), wird in Abschnitt 4.2 diskutiert.

3 Friedmann-Robertson-Walker-Metrik

3.1 Herleitung

Die Friedmann-Robertson-Walker-Metrik beruht auf einer simplen Annahme; diese wird als das **kosmologische Prinzip** bezeichnet:

Es existiert kein ausgezeichnete Punkt im Universum.

Aus philosophischer Sicht besagt dieses Prinzip, dass alle Beobachter an jedem Punkt in gewisser Weise gleichberechtigt sind. Egal wo man ist und in welche Richtung man schaut, das Universum stellt sich dem Beobachter gleich dar. Dies ist für die physikalischen Gesetze selbstverständlich; sie sollten immer überall gleich gelten. Das kosmologische Prinzip trifft jedoch Aussagen über die Gestalt des Universums. Eine andere Formulierung lautet:

Das beobachtbare Universum ist homogen und isotrop.

Es dürfen also weder Punkte noch Richtungen im Universum ausgezeichnet sein. Dass dies offenbar nicht allgemein gilt, beweist die Existenz der Erde an sich sowie von Planeten und Sternen allgemein. Solche Anhäufungen von Masse entsprechen nicht der Forderung von Homogenität, die ja eben bedeutet, dass jeder Punkt gleich ist. Betrachtet man jedoch größere Skalen, bis hin zu kosmologischen Größenordnungen, so erkennt man, dass diese Annahme sehr wohl gerechtfertigt ist, da alle Anhäufungen nur sehr kleine Schwankungen darstellen. Ein Beispiel für diese Homogenität findet sich in der kosmischen Hintergrundstrahlung:

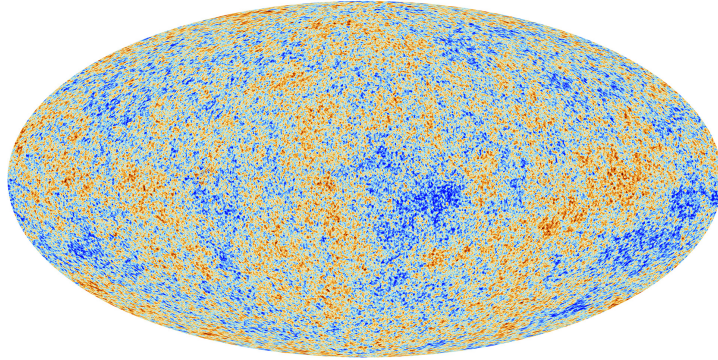


Abbildung 3 – Planck CMB [3]

Um nun eine Metrik basierend auf dem kosmologischen Prinzip zu entwickeln, wird an den mathematischen Hintergrund aus Abschnitt 2.1 erinnert: die Sphäre ist homogen und isotrop! Durch Rotationen ist jeder Punkt in jeden anderen überführbar und es ist auch keine Richtung ausgezeichnet. Also wird hier die 3-Sphäre als Ansatz für den dreidimensionalen Raum genutzt:

$$R^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$$

Auch hier lässt sich die „fiktive“ vierte Koordinate ersetzen:

$$x_4^2 = R^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 \quad (3.1)$$

Zunächst wird das Linienelement in Zeit- und Raumkoordinaten aufgespalten. Dies ist möglich, da das kosmologische Prinzip auch keine Mischung zwischen Zeit- und Raumkoordinaten erlaubt; die Matrixdarstellung der Metrik muss diagonal sein.

$$\begin{aligned} ds^2 &= g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \\ &= dt^2 - g_{ij} dx^i dx^j \\ &\equiv dt^2 - \vec{dl}^2 \end{aligned}$$

Nun wird nur noch das räumliche Linienelement \vec{dl} betrachtet. Mit (3.1) lässt sich dieses umformen:

$$\begin{aligned}\vec{dl}^2 &= dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + dx_4^2 \\ &= dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + \frac{(x_1 dx_1 + x_2 dx_2 + x_3 dx_3)^2}{R^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2}\end{aligned}$$

Wie bei der 2-Sphäre in Abschnitt 2.1 werden nun Kugelkoordinaten eingeführt:

$$x_1 = r' \sin \theta \cos \phi, \quad x_2 = r' \sin \theta \sin \phi, \quad x_3 = r' \cos \theta$$

Korrekte Berechnung der Differentiale führt zu dem folgenden Ausdruck

$$\begin{aligned}\vec{dl}^2 &= dr'^2 + r'^2 d\theta^2 + r'^2 \sin^2 \theta d\phi^2 + \frac{r'^2 dr'^2}{R^2 - r'^2} \\ &= \frac{(R^2 - r'^2) dr'^2}{R^2 - r'^2} + r'^2 d\theta^2 + r'^2 \sin^2 \theta d\phi^2 + \frac{r'^2 dr'^2}{R^2 - r'^2} \\ &= R^2 \left(\frac{dr'^2}{1 - r'^2} + r'^2 d\theta^2 + r'^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \right),\end{aligned}$$

bei dem $r' = r/R$ substituiert wurde, um R herausziehen zu können. Dieser **Skalenfaktor** kann aufgrund der Homogenität und Isotropie nur von der Zeit abhängen und beschreibt die Ausdehnung des Universums.

Man muss beachten, dass die Sphäre nicht die einzige Mannigfaltigkeit ist, die die Forderungen des kosmologischen Prinzips erfüllt. Auch ein Hyperboloid, also die Ersetzung $R \rightarrow iR$,

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = -R^2,$$

führt zu den gewünschten Eigenschaften. Analoge Rechnungen führen auf eine ähnliche Metrik:

$$\vec{dl}^2 = R(t)^2 \left(\frac{dr^2}{1 + r^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \right).$$

Zuletzt erfüllt natürlich auch ein flacher Raum ($R \rightarrow \infty$) das kosmologische Prinzip:

$$\vec{dl}^2 = R(t)^2 (dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2).$$

Diese drei Fälle werden in der **Friedmann-Robertson-Walker-Metrik** zusammengefasst:

$$ds^2 = dt^2 - R(t)^2 \left(\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \right). \quad (3.2)$$

3.2 Folgerungen

Allein mit der Metrik lassen sich schon Aussagen zu kosmologischen Phänomenen treffen. Eine erste wichtige Größe ist das **Horizontvolumen**, das im Prinzip den Abstand beschreibt, der zwischen zwei Ereignissen bestehen kann, wenn diese kausal zusammenhängen. Ein kausaler Zusammenhang kann nur bestehen, wenn Informationen ausgetauscht wurden und dies geschieht höchstens mit Lichtgeschwindigkeit. Eine andere Sichtweise ist also, dass das Horizontvolumen die Ausdehnung des sichtbaren Universums beschreibt. Man betrachte nun also ein Signal, das zur Zeit $t = 0$ am Punkt $r = r_H$ ausgesendet wurde. Aufgrund der Homogenität und Isotropie des Universums kann der Standpunkt des Beobachters bei $r_0 = 0$ gewählt werden und, da Geodäten hier Großkreise sind, θ und ϕ festgehalten werden. Zusätzlich gilt für Licht $ds^2 = 0$. Damit gilt folgende Identität:

$$\int_0^t \frac{dt'}{R(t')} = \int_0^{r_H} \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}} \quad (3.3)$$

Der Abstand zum Horizont ist nun

$$d_H(t) = \int_0^{r_H} \sqrt{g_{11}} dr,$$

was sich mit (3.3) durch ein Zeitintegral ersetzen lässt:

$$d_H(t) = R(t) \int_0^t \frac{dt'}{R(t')} \quad (3.4)$$

Wenn dieser Abstand zum Horizont nun endlich ist, bedeutet das, dass ein Partikelhorizont das sichtbare Universum von dem Teil des Universums trennt, aus dem uns keine Lichtsignale erreichen können. Ob dieser Abstand endlich ist, wird vom Verhalten des Skalenfaktors nahe $t = 0$ bestimmt. Es wird sich ergeben, dass $d_H(t) \propto t$ endlich ist.

Von Interesse für Messungen in der Kosmologie ist die **Rotverschiebung**. Im Folgenden werden daher zwei aufeinanderfolgende Wellenberge eines Lichtsignals betrachtet. Der zurückgelegte Weg beider Wellenberge ist bei langsamer Änderung des Skalenfaktors der

gleiche und das Integral lässt sich dank (3.3) als Zeitintegral schreiben:

$$\int_{t_1}^{t_0} \frac{dt'}{R(t')} = \int_{t_1+\delta t_1}^{t_0+\delta t_0} \frac{dt'}{R(t')}$$

$$\int_{t_1}^{t_1+\delta t_1} \frac{dt'}{R(t')} = \int_{t_0}^{t_0+\delta t_0} \frac{dt'}{R(t')}.$$

Hier wurden bereits die Integralgrenzen verschoben, um im Folgenden die Integrale für näherungsweise konstanten Skalenfaktor $R(t)$ auszuführen:

$$\frac{\delta t_1}{R(t_1)} = \frac{\delta t_0}{R(t_0)}.$$

Nach Definition ist nun aber δt_i die Wellenlänge des Lichts und es ergibt sich die bekannte Formel für die Rotverschiebung:

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_0} = \frac{R(t_1)}{R(t_0)} \equiv z + 1. \quad (3.5)$$

Eine Taylor-Entwicklung dieser Gleichung um einen Zeitpunkt t_0 ergibt

$$\frac{R(t)}{R(t_0)} = 1 + H_0(t - t_0) - \frac{1}{2}q_0 H_0^2(t - t_0)^2 + \dots,$$

wobei hier die **Hubble-Konstante** $H_0 \equiv \frac{\dot{R}(t_0)}{R(t_0)}$ und der **Abbremsparameter** $q_0 \equiv \frac{-\ddot{R}(t_0)}{\dot{R}^2(t_0)} R(t_0) = -\frac{\ddot{R}}{R H_0^2}$ definiert wurden. Die Hubble-Konstante beschreibt die Ausdehnungsrate des Universums, während der Abbremsparameter eine Entschleunigung (bei $q_0 > 0$) oder eine Beschleunigung (bei $q_0 < 0$) dieser Ausdehnung beschreibt.

Mit $1 + z = \frac{R(t_0)}{R(t)}$ und der inversen Taylor-Reihe $(1 + ax + bx^2 + \dots)^{-1} = 1 - ax + (a^2 - b)x^2 + \dots$ lässt sich die Gleichung umformen:

$$z = H_0(t_0 - t) + \left(1 + \frac{q_0}{2}\right) H_0^2(t_0 - t)^2 + \dots$$

Erneute Invertierungen sowie eine Ersetzung der Zeit durch einen Abstand ergeben das **Hubble-Gesetz**:

$$z = H_0 d + \frac{1}{2}(1 - q_0) H_0^2 d^2 + \dots \quad (3.6)$$

Der erste Term der Gleichung ist der bekannte lineare Teil des Hubble-Gesetzes, es kommt jedoch noch ein weiterer Term hinzu, der eine Ent- oder Beschleunigung der Ausdehnung berücksichtigt. Der lineare Zusammenhang gilt nur für $q_0 = 1$ und ob nun die Ausdehnung immer fortschreitet oder abgebremst wird, wird in Abschnitt 4.2 geklärt.

4 Friedmann-Gleichungen

4.1 Herleitung

Nun soll mit der hergeleiteten Metrik und dem kosmologischen Prinzip die Einstein-Gleichung vereinfacht werden. Zunächst wird der rechte Teil von Gleichung (2.5), also der Energie-Impuls-Tensor, bestimmt. Wie zuvor die Metrik muss der Tensor aufgrund der Homogenität des Raumes diagonal sein. Zusätzlich müssen aber auch die Raumkomponenten gleich sein, da sonst eine ausgezeichnete Richtung existieren würde. Mit Kenntnissen aus der Fluidodynamik erkennt man, dass diese Forderungen zum Energie-Impuls-Tensor eines **perfekten Fluids** mit Energiedichte $\rho(t)$ und Druck $p(t)$ führen:

$$T^\mu_\nu = \text{diag}(\rho, -p, -p, -p).$$

Die Energie-Impuls-Erhaltung wird in der Relativitätstheorie durch die kovariante Ableitung des Energie-Impuls-Tensors beschrieben:

$$T^{\mu\nu}_{;\mu} = 0.$$

Die 00-Komponente dieser Gleichung ist hier nichts anderes als der erste Hauptsatz der Thermodynamik:

$$d(\rho R^3) = -pd(R^3). \quad (4.1)$$

Dass dieser Zusammenhang gelten muss, wird auch anders ersichtlich; die Ausdehnung des Universums ist ein adiabatischer Prozess, da bei der Ausdehnung keine Wärme über den „Rand“ hinaus ausgetauscht wird. Daher wird δQ im ersten Hauptsatz $dU = \delta Q + \delta W$ null und mit $dU = d(\rho R^3)$ und $\delta W = -pdV = -pd(R^3)$ folgt (4.1).

Für die weiteren thermodynamischen Rechnungen wird auch eine Zustandsgleichung

benötigt. Es zeigt sich, dass der Ausdruck

$$p = \omega \rho$$

mit zeitunabhängiger Konstante ω trotz seiner Einfachheit eine überaus gute Beschreibung der Zusammenhänge im Universum liefert.

Mit diesen Erkenntnissen lässt sich der erste Hauptsatz nun integrieren, wodurch mit

$$\rho \propto R^{-3(1+\omega)}$$

eine Abhängigkeit der Dichte vom Skalenfaktor bestimmt wird. Weitere Erkenntnisse der statistischen Physik führen zu den drei wesentlichen interessanten Fällen: die Zeitperiode, in der das Universum von Strahlung dominiert war, ein materiedominiertes Universum, in dem der Druck für kleine Temperaturen 0 ist und ein vakuumdominiertes Universum.

Strahlung	$p = \frac{1}{3}\rho$	$\rho \propto R^{-4}$
Materie	$p = 0$	$\rho \propto R^{-3}$
Vakuum	$p = -\rho$	$\rho \propto \text{const.}$

Nun zur linken Seite der Einstein-Gleichung (2.5). Mit den Christoffel-Symbolen (2.1) lassen sich der Ricci-Tensor

$$R_{00} = -3 \frac{\ddot{R}}{R}$$

$$R_{ij} = - \left[\frac{\ddot{R}}{R} + 2 \frac{\dot{R}^2}{R^2} + \frac{2k}{R^2} \right] g_{ij}$$

und der Ricci-Skalar

$$\mathcal{R} = -6 \left[\frac{\ddot{R}}{R} + \frac{\dot{R}^2}{R^2} + \frac{k}{R^2} \right]$$

bestimmen. Einsetzen ergibt die verschiedenen Komponenten der Tensor-Gleichung:

Die 00-Komponente

$$\frac{\dot{R}^2}{R^2} + \frac{k}{R^2} = \frac{8\pi G}{3} \rho, \quad (4.2)$$

die eine nichtlineare Gleichung für die zeitliche Änderung des Skalenfaktors ist, sowie die ii -Komponente

$$2\frac{\ddot{R}}{R} + \frac{\dot{R}^2}{R^2} + \frac{k}{R^2} = -8\pi Gp, \quad (4.3)$$

welche mit \ddot{R} die Beschleunigung des Skalenfaktors und mit k die Geometrie des Universums beinhaltet.

4.2 Folgerungen

Durch Subtraktion von (4.2) von (4.3) erhält man eine dritte, äquivalente Gleichung:

$$\frac{\ddot{R}}{R} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p). \quad (4.4)$$

In der Literatur werden oft die Gleichungen (4.2) und (4.4) als die Friedmann-Gleichungen bezeichnet. Anhand von Gleichung (4.4) kann man bereits einige Aussagen über die Expansion des Universums treffen. Im frühen Universum, also im strahlungsdominierten Fall und auch im materiedominierten Fall sind nämlich ρ und p positiv. Damit ist die rechte Seite von Gleichung (4.4) negativ. Zudem ist auch der Skalenfaktor R positiv, womit zwangsläufig \ddot{R} negativ sein muss.

Messungen ergeben zudem, dass \dot{R} positiv ist. Man erkennt also, dass die zeitliche Änderung des Skalenfaktors \dot{R} eine positive monoton fallende Funktion der Zeit ist. Das bedeutet, dass das Universum sich schon immer ausgedehnt hat. Wenn sich das Universum aber immer ausgedehnt hat, muss es einen Punkt $t_0 \equiv 0$ gegeben haben, an dem die Ausdehnung $R(t_0) = 0$ war. An diesem Punkt, der auch als **Urknall** bezeichnet wird, werden die Friedmann-Gleichungen singulär und man kann nicht sinnvoll jenseits dieses Punktes extrapolieren.

Durch Einsetzen von $H = \frac{\dot{R}}{R}$ in Gleichung (4.2) lässt sich ein Zusammenhang zwischen der Geometrie des Universums und der Energiedichte herstellen. Die umgeformte Gleichung lautet

$$\frac{k}{H^2 R^2} = \frac{\rho}{3H^2/(8\pi G)} - 1 \equiv \Omega - 1, \quad (4.5)$$

wobei das Verhältnis der Dichte zur kritischen Dichte $\rho_C \equiv \frac{3H^2}{8\pi G}$ mit $\Omega \equiv \frac{\rho}{\rho_C}$ bezeichnet wird. Nun lassen sich erneut drei Fallunterscheidungen treffen:

$$\begin{aligned}
 k=+1 &\Leftrightarrow \Omega > 1 && \text{geschlossen} \\
 k=0 &\Leftrightarrow \Omega = 1 && \text{flach} \\
 k=-1 &\Leftrightarrow \Omega < 1 && \text{offen}
 \end{aligned}$$

Für eine große Dichte ergibt sich also ein geschlossenes Universum, während eine kleine Dichte ein offenes Universum bedeutet. Lediglich wenn die Dichte genau der kritischen Dichte entspricht, ist das Universum flach. Die drei Fälle sind in der folgenden Graphik verdeutlicht.

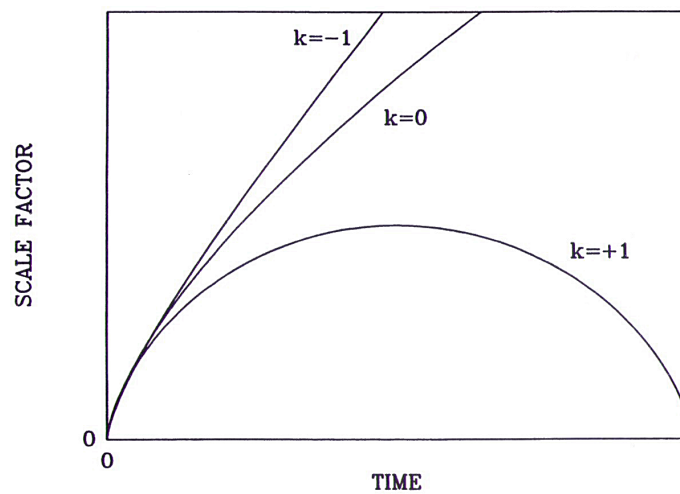


Abbildung 4 – Evolution von $R(t)$ für geschlossene, offene und flache FRW-Modelle [1]

Aktuelle Messungen ergeben mit hoher Genauigkeit, dass die Dichte des Universums tatsächlich der kritischen Dichte entspricht, womit das Universum flach sein muss. Multipliziert man Gleichung (4.4) mit dem Inversen von Gleichung (4.2), so erhält man einen Ausdruck für den Abbremsparameter q_0 :

$$\begin{aligned}
 \frac{\ddot{R}}{R} \frac{R^2}{\dot{R}^2} &= -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p) \left(\frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{k}{R^2} \right)^{-1} \\
 \Leftrightarrow q_0 &= \frac{\Omega_0}{2} \left(1 + \frac{3p}{\rho} \right)
 \end{aligned}$$

Auch hier bezeichnet Ω_0 das Dichteverhältnis. Es werden wie zuvor die drei Fälle des strahlungs- materie- und vakuumenergiedominierten Universums betrachtet:

Strahlung	$p = \frac{1}{3}\rho$	$q_0 = \Omega_0$
Materie	$p = 0$	$q_0 = \Omega_0/2$
Vakuum	$p = -\rho$	$q_0 = -\Omega_0$

Man sieht, dass die Ausdehnung des Universums sowohl im strahlungs- als auch im materiedominierten Universum abgebremst wird. Einzig im vakuumenergiedominierten Universum dehnt sich das Universum unaufhaltsam aus. Nun ist q_0 jedoch messbar und es ergibt sich gerade, dass $q_0 < 0$ gilt. Daraus folgt, dass das Universum vakuumenergiedominiert ist!

Aus der Friedmann-Gleichung (4.2) lässt sich zudem das **Alter des Universums** berechnen. Dazu werden zunächst die beiden Fälle eines materiedominierten und eines strahlungsdominierten Universums betrachtet:

a) materiedominiertes Universum:

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \left(\frac{R}{R_0}\right)^{-3} \quad \Leftrightarrow \quad \left(\frac{\dot{R}}{R_0}\right)^2 + \frac{k}{R_0^2} = \frac{8\pi G}{3}\rho_0 \frac{R_0}{R}$$

b) strahlungsdominiertes Universum:

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \left(\frac{R}{R_0}\right)^{-4} \quad \Leftrightarrow \quad \left(\frac{\dot{R}}{R_0}\right)^2 + \frac{k}{R_0^2} = \frac{8\pi G}{3}\rho_0 \left(\frac{R_0}{R}\right)^2$$

Mit $\frac{k}{R_0^2} = H_0^2(\Omega_0 - 1)$ und $\frac{R_0}{R} = 1 + z = \frac{1}{x}$ kann man nun das Zeitintegral, das das Alter des Universums liefern soll, in folgender Weise schreiben:

$$t = \int_0^{R(t)} \frac{dR'}{\dot{R}'}$$

a) materiedominiertes Universum:

$$= H_0^{-1} \int_0^{(1+z)^{-1}} \frac{dx}{(1 - \Omega_0 + \Omega_0 x^{-1})^{\frac{1}{2}}}$$

b) strahlungsdominiertes Universum:

$$= H_0^{-1} \int_0^{(1+z)^{-1}} \frac{dx}{(1 - \Omega_0 + \Omega_0 x^{-2})^{\frac{1}{2}}}$$

Zwar lassen sich diese Integrale analytisch lösen, jedoch gewährt dies keine großen Erkenntnisse und ist unnötig aufwändig. Daher wird an dieser Stelle die Lösung graphisch präsentiert:

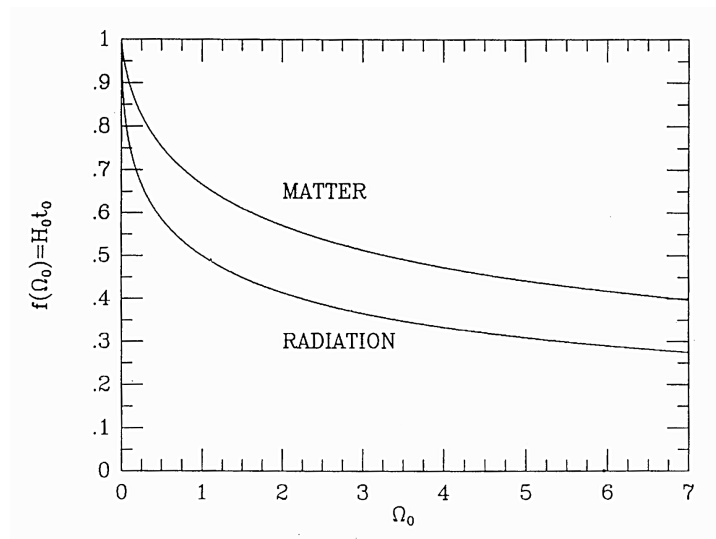


Abbildung 5 – Alter des Universums als Funktion von Ω_0 [1]

Hier kann man das berechnete Alter des Universums für den schon zuvor genannten gemessenen Wert der Dichte $\Omega_0 = 1$ (für ein flaches Universum) ablesen. Dabei wird jedoch ein Problem ersichtlich: Ein materiedominiertes Universum wäre nach dieser Rechnung nur $t = 9,2 \cdot 10^9$ y alt! An dieser Stelle wird die kosmologische Konstante Λ wieder eingeführt. Hier soll sie eine Vakuumenergiedichte beschreiben, sodass auch der Fall eines vakuumenergiedominierten Universums untersucht werden kann.

$$\left(\frac{\dot{R}}{R_0} \right)^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho_M + \frac{\Lambda}{3}$$

Die Gesamtdichte setzt sich nun zusammen aus der Materiedichte und der Vakuumenergiedichte:

$$\Rightarrow \Omega_0 = \Omega_M + \Omega_V = 1$$

Erneut wird die Lösung graphisch dargestellt:

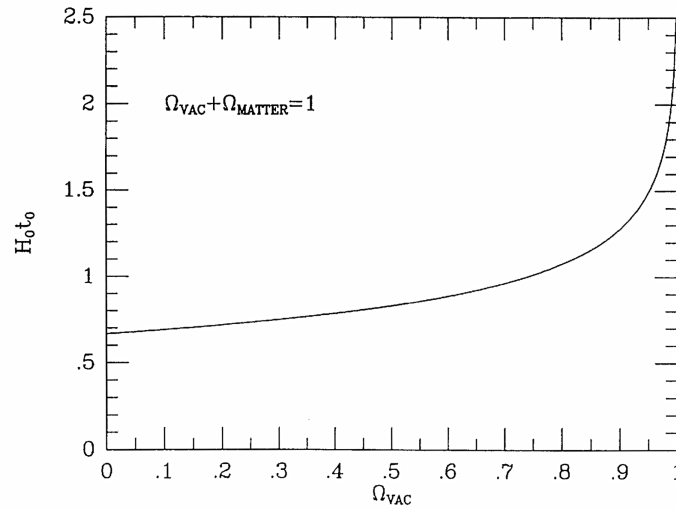


Abbildung 6 – Alter eines $k = 0$ Universums mit Materie- und Vakuumenergie [1]

Wie man erkennt, ergibt sich für $\Omega_V \approx 0,76$ der bekannte und zu erwartende Wert $t = 13,7 \cdot 10^9$ y. Dies ist ein weiterer deutlicher Hinweis darauf, dass das Universum nicht materiedominiert ist, sondern überwiegend von Vakuumenergie dominiert wird.

5 Zusammenfassung

Es hat sich gezeigt, dass die Anwendung des kosmologischen Prinzips auf einen recht simplen Ausdruck für die Metrik des Universums geführt hat und eine starke Vereinfachung der Einstein-Gleichung ermöglicht hat. In Folge dessen waren analytische Lösungen möglich, die verschiedene bedeutsame Effekte der Kosmologie beschreiben. Allein mit der Metrik ließen sich Rotverschiebung und Hubble-Gesetz herleiten, aus den Friedmann-Gleichungen folgten sogar Urknall und Alter des Universums. Außerdem stimmen die Ergebnisse dieses recht einfachen Modells überaus gut mit aktuellen Messungen überein. Es konnte zusätzlich über Dichtemessungen die Geometrie des Universums bestimmt und als flach identifiziert werden.

Allerdings bleiben auch noch Fragen offen. So wurde festgestellt, dass im Friedmann-Robertson-Walker-Modell die Dichte des Universums zu etwa 76 % aus Vakuumenergiedichte bestehen muss. Sowohl die gemessene Beschleunigung der Ausdehnung als auch das Alter des Universums liefern deutliche Indizien auf derartige „dunkle Energie“. Was genau diese „dunkle Energie“ jedoch ist, ist nicht bekannt.

Literatur

- [1] E. Kolb und M. Turner. *The early Universe*. Addison Wesley, 1991 (siehe S. 2, 15, 17 f.).
- [2] T.-P. Cheng. *Relativity, Gravitation and Cosmology: A Basic Introduction*. Oxford University Press, 2004 (siehe S. 5).
- [3] ESA und the Planck Collaboration. *Planck CMB*. URL: http://www.esa.int/spaceinimages/Images/2013/03/Planck_CMB (siehe S. 8).
- [4] L. Bergström und A. Goobar. *Cosmology and Particle Astrophysics*. Springer, 2006.