

# Robertson-Walker-Metrik und Friedmann-Gleichung

Saskia Schmiemann

Ausarbeitung zum Seminarvortrag vom 06.11.2013

## 1 Einleitung

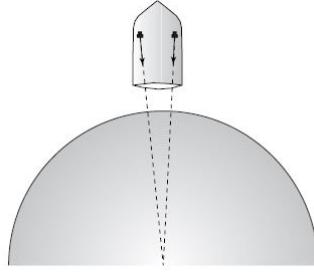
Im vorherigen Vortrag wurde die historische Entwicklung der Erkenntnisse des Universums behandelt. Im folgenden wird ein Einblick in die mathematische Grundlage für die Berechnung des Universums gegeben. Die Beschreibung des Universums wurde erst durch die Integration der Gravitation in die relativistische theoretische Physik durch die *Allgemeine Relativitätstheorie* (ART) von Albert Einstein möglich. Basierend auf den mathematischen Formalismus wurde die *Robertson-Walker-Metrik* entwickelt, durch die unter anderem kosmische Effekte wie die Rotverschiebung beschrieben werden können. Als Lösung der *Einstein-Gleichung*, welche in der ART aufgestellt wurde, gilt die *Friedmann-Gleichung*. Durch diese Gleichungen können qualitative Aussagen über die Expansion und das Alter des Universums gemacht werden. Im folgenden werden die wichtigsten Grundlagen und kleine Anwendungsbeispiele vorgestellt.

## 2 Allgemeine Relativitätstheorie

Durch die ART kann nicht nur die Gravitation relativistisch beschrieben werden, sondern sie liefert auch das Handwerkzeug beschleunigten Systeme berechnen zu können. Durch die Modifikation der Gravitationsgesetze von Newton und eine neue geometrische Interpretation der gravitativen Kräfte entstand die ART.

### 2.1 Äquivalenzprinzip

Grundlage der ART ist das Äquivalenzprinzip. Es werden zwei Raketen betrachtet. Eine Rakete beschleunigt mit  $g$  ohne Einwirkung eines gravitativen Feldes, während die andere in einem gravitativen Feld still steht. In beiden Raketen wird jeweils eine Masse fallen gelassen. Die hierbei wirkenden Kräfte sind gegeben durch  $F = a \cdot m_i$  für die beschleunigte Rakete und  $F = g \cdot m_g$  für die Rakete im gravitativen Feld. Durch Gleichsetzen der Kräfte ergibt sich für die Beschleunigung  $a = \frac{m_g}{m_i} g$ , da die Rakete mit  $a = g$  beschleunigen



**Abbildung 1:** Rakete im gravitativen Feld [4]

soll ergibt sich somit  $m_i = m_g$ . Das heißt, dass die gravitative Masse  $m_g$  und die träge Masse  $m_i$  gleich sind.

Betrachtet man nun die Rakete im gravitativen Feld genauer und lässt zwei Massen in der Rakete fallen, so verlaufen die Flugbahnen der Massen zum Zentrum der Gravitation. Wie in der Abbildung 1 zu sehen ist, schneiden sich die Flugbahnen im Ursprung der gravitativen Kraft. Je näher die Massen einander sind umso geringer wird das Zusammenlaufen. Sind die Objekte sehr nah beieinander kann das gravitative Feld als homogen approximiert werden. Das heißt, jedes Problem kann auf die SRT zurück geführt werden, durch die Wahl eines passenden lokalen Inertialsystems.

## 2.2 Konsequenzen der ART

Die bedeutendsten Konsequenzen der ART sind durch die Anwesenheit eines gravitativen Feldes bedingt. Zum einen verursacht die Anwesenheit eines gravitativen Feldes eine Verlangsamung der Zeit. Zum anderen werden ebene Lichtwellen durch die Anwesenheit eines gravitativen Körpers gekrümmmt.

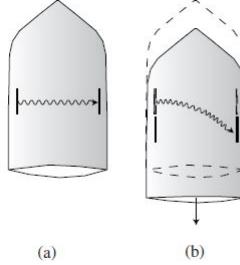
### 2.2.1 Krümmung von Licht

In Abbildung 2 (a) ist eine stillstehende Rakete abgebildet, diese wird von einem Laserstrahl horizontal durchquert. Der Laserstrahl ist komplett gerade. In Abbildung 2 (b) ist die gleiche Rakete abgebildet, welche sich nun im freien Fall befindet. Dem optischen Theorem zufolge, folgt das Licht dem zeitschnellsten Weg zum Detektor. Für einen außenstehenden Beobachter, der den Lichtstrahl beobachtet, sieht es allerdings so aus, als würde der Lichtstrahl sich krümmen. Dies ist ein erstes Indiz dafür das ein gravitatives Feld eine Krümmung von ebenen Lichtwellen verursacht.

## 2.3 Einstein-Gleichung

Die zentrale Gleichung der ART ist die Einsteingleichung:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \frac{8\pi G_N}{c^4}T_{\mu\nu}. \quad (1)$$



**Abbildung 2:** Rakete im gravitativen Feld [4]

Mit der Lösung der Einstein-Gleichung können weitere Aufschlüsse über die Dynamik des Universums gezogen werden. Im folgenden sollen zunächst die einzelnen Terme der Einstein-Gleichung erläutert werden. Die Einstein-Gleichung muss das Äquivalenzprinzip erfüllen und somit als kovariante Tensorgleichung formuliert werden. Dabei dient der symmetrische divergenzfreie Energie- und Impuls-Tensor  $T_{\mu\nu}$  als Quelle des Gravitationsfeldes. Es soll ebenfalls gelten, dass die partielle Differentialgleichung maximal zweiter Ordnung im metrischen Tensor  $g_{\mu\nu}$  ist. Schlussendlich müssen Newtons Gravitationsgesetze im Newton'schen Grenzfall enthalten sein.

Als Ansatz für die Einstein-Gleichung wird die Tensorgleichung:

$$X_{\mu\nu} = aT_{\mu\nu} \quad (2)$$

verwendet. Dabei ist  $a$  eine Konstante die noch aus den Newton'schen Grenzfall bestimmt werden muss und  $X_{\mu\nu}$  ein unbekannter Tensor, der wie der Energie- und Impuls-Tensor  $T_{\mu\nu}$  symmetrisch und divergenzlos sein muss. Im weiteren soll der unbekannte Tensor aus dem metrischen Tensor  $g_{\mu\nu}$  und seinen Ableitungen gebildet werden. Es stellt sich heraus, dass der Einstein-Tensor

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\mathcal{R} \quad (3)$$

den Anforderungen genügt. Dabei ist

$$R_{\mu\nu} = g^{\alpha\gamma}R_{\alpha\mu\gamma\nu} \quad (4)$$

der Ricci-Tensor und bildet sich aus der Anwendung des metrischen Tensors auf den Krümmungstensor  $R_{\mu\nu\alpha\beta}$ . Dieser beschreibt die Krümmung des Raumes und lässt sich aus der zweiten Ableitung des metrischen Tensors  $g_{\mu\nu}$  berechnen. Im weiteren wird das Krümmungsskalar

$$R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} \quad (5)$$

verwendet, welches sich wiederum aus der Wirkung des metrischen Tensors auf den Ricci-Tensor ergibt.

Der metrische Tensor  $g_{\mu\nu}$  bestimmt das Quadrat des Raumzeitintervalls  $ds^2$  zwischen zwei infinitesimal benachbarten Punkten  $ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$ . Lokal können die Koordinaten so gewählt werden, dass die Metrik auf die Minkowski-Metrik der SRT reduziert werden kann. Das heißt  $g_{\mu\nu}$  kann lokal auf  $\eta_{\mu\nu}$  gebracht werden, sodass  $ds^2 = dt^2 - d\vec{x}^2$  gilt.

### 3 Robertson-Walker-Metrik

#### 3.1 Herleitung

Voraussetzend für die Robertson-Walker-Metrik ist das kosmologische Prinzip, welches postuliert, dass Homogenität und Isotropie im ganzen Raum gelte. Ebenso muss die Metrik des Raumes an allen Punkten und allen Richtungen zu jedem Zeitpunkt dieselbe sein

$$ds^2 = dt^2 - g_{ij}dx^i dx^j. \quad (6)$$

Zur Vereinfachung wird zunächst eine  $s^2$ -Sphäre betrachtet mit dem Radius  $R$  in kartesischen Koordinaten

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = R^2. \quad (7)$$

Das Längenelement ergibt sich zu

$$d\bar{x}^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2. \quad (8)$$

Hierbei kann nun eine Koordinate eliminiert werden durch

$$x_3 = \sqrt{R^2 - x_1^2 - x_2^2} \quad \text{und} \quad dx_3 = -\frac{x_1 dx_1 + x_2 dx_2}{\sqrt{R^2 - x_1^2 - x_2^2}}. \quad (9)$$

Durch einsetzen folgt

$$d\bar{x}^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + \frac{(x_1 dx_1 + x_2 dx_2)^2}{R^2 - x_1^2 - x_2^2}. \quad (10)$$

Mit Einführung von Polarkoordinaten ( $x_1 = r' \cos(\Theta)$ ,  $x_2 = r' \sin(\Theta) \Rightarrow x_3^2 = R^2 - r'^2$ ) und das Definieren einer dimensionslosen Variable  $r = \frac{r'}{R}$  mit  $0 \leq r \leq 1$  ergibt sich

$$d\bar{x}^2 = R^2 \left( \frac{dr^2}{1 - r^2} + r^2 d\Theta^2 \right). \quad (11)$$

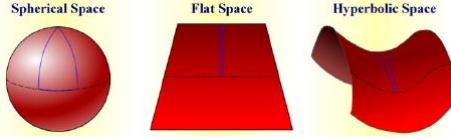
Wird nun der Radius  $R$  imaginär gesetzt zu  $iR$ , ergibt sich

$$d\bar{x}^2 = R^2 \left( \frac{dr^2}{1 + r^2} + r^2 d\Theta^2 \right). \quad (12)$$

Allgemein lässt sich dies schreiben als

$$d\bar{x}^2 = R^2 \left( \frac{dr^2}{1 + kr^2} + r^2 d\Theta^2 \right). \quad (13)$$

Hierbei gibt  $k$  ein Maß für den Radius. Ist  $k = 1$  so gilt für den Radius  $R \rightarrow R$  und somit haben wir eine geschlossene Kugeloberfläche, siehe Abbildung 3 *Spherical Space*. Gilt  $k = -1$  so erhalten wir eine offene Fläche mit dem imaginären Radius  $R \rightarrow iR$ , siehe Abbildung 3 *Hyperbolic Space*. Wird  $k = 0$  gesetzt ergibt sich eine flache Fläche, siehe hierzu Abbildung 3 *Flat Space*.



**Abbildung 3:** Darstellung der Flächen für verschiedene  $k$ .[5]

Die gleiche Berechnung wird nun für eine  $S^3$ -Sphäre durchgeführt

$$R^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 \quad (14)$$

$$d\vec{x}^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + \frac{(x_1 dx_1 + x_2 dx_2 + x_3 dx_3)^2}{R^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2}. \quad (15)$$

Mit Kugelkoordinaten ( $x_1 = r' \sin(\Theta) \cos(\Phi)$ ,  $x_2 = r' \sin(\Theta) \sin(\Phi)$ ,  $x_3 = r' \cos(\Theta)$ ) ergibt sich

$$d\vec{x}^2 = R^2 \left( \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2(\theta) d\phi^2 \right). \quad (16)$$

In die Ursprüngliche Formel  $ds^2 = dt^2 - d\vec{x}^2$  eingesetzt erhält man, die Robertson-Walker-Metrik

$$ds^2 = c^2 dt^2 - R^2(t) \left( \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2(\theta) d\phi^2 \right). \quad (17)$$

### 3.2 Lichtausbreitung

Für die Linien der Lichtausbreitung gilt  $ds^2 = 0$ , analog zur SRT. Da  $\Theta$  und  $\Phi$  konstant sind und nur der radiale Term von Bedeutung ist, gilt als Zusammenhang für die Lichtausbreitung:

$$c \cdot dt = R(t) \frac{dr}{1 - kr}. \quad (18)$$

Durch Integrieren der Gleichung erhält man

$$\int_0^t \frac{dt'}{R(t')} = \int_0^{r_H} \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}}. \quad (19)$$

Die Multiplikation mit  $R(t)$  definiert den zeit-veränderlichen Abstand

$$d_H(t) = R(t) \int_0^t \frac{dt'}{R(t')}. \quad (20)$$

Mit diesem Abstand kann ein Teilchenhorizont definiert werden. Wenn  $d_H(t)$  konvergiert, kann das Licht in dem endlichen Alter des Universums nur eine endliche Strecke zurückgelegt haben. Der am weitesten entfernte Punkt dessen Licht uns auf der Erde noch erreicht, bezeichnet man somit als Teilchenhorizont.

### 3.3 Teilchenbewegung

Im folgenden soll ein massenbehaftetes Teilchen, welches sich im freien Fall befindet, betrachtet werden. Ein Teilchen im freien Fall folgt der Bewegungsgleichung

$$\frac{du^\mu}{ds} + \Gamma_{\nu\rho}^\mu u^\nu u^\rho = 0 \quad \text{mit} \quad u^\mu = (\gamma c, \gamma \vec{v}). \quad (21)$$

Wobei die Geschwindigkeit  $u^\mu$  analog zur SRT sein soll. Es folgt

$$\frac{du^0}{ds} + \Gamma_{\nu\rho}^0 u^\nu u^\rho = 0, \quad (22)$$

woraus mit einsetzen der Metrik  $\Gamma_{ij}^0 = \frac{\dot{R}}{R} g_{ij}$ ,  $|\vec{u}|^2 = g_{ij} v^i v^j$

$$\frac{du^0}{ds} + \frac{\dot{R}}{R} |\vec{u}|^2 = 0 \quad (23)$$

folgt. Mit  $(u^0)^2 - |\vec{u}|^2 = c^2$ ,  $u^0 = \frac{c dt}{ds}$  und  $u^0 du^0 = |\vec{u}| d|\vec{u}|$  folgt somit

$$\frac{1}{u^0} \frac{d|\vec{u}|}{ds} + \frac{\dot{R}}{R} |\vec{u}| = 0. \quad (24)$$

Umgestellt ergibt sich:

$$\frac{\dot{R}}{R} = -c \cdot \frac{|\vec{u}|}{\vec{u}} \rightarrow |\vec{u}| \propto R^{-1}. \quad (25)$$

Im nicht-relativistischen Fall  $|\vec{u}| \approx |\vec{V}|$  ergibt sich zum Zeitpunkt  $t_1$

$$|\vec{v}_0| = |\vec{v}_1| \frac{R(t_1)}{R(t_0)}. \quad (26)$$

Hierbei soll  $t_0$  die Anfangszeit sein und  $|\vec{v}_0|$  die Anfangsgeschwindigkeit des Beobachters bezüglich des mitbewegten Systems. Wächst  $R(t)$  an, so kommt der Beobachter im mitbewegten System zum Stillstand.

### 3.4 Rotverschiebung

Emittiertes Licht kann quantenmechanisch als frei bewegliches Photon betrachtet werden, oder klassisch als ebene Welle. Im Fall der ebenen Welle ändert sich der Impuls  $p = \frac{\hbar}{\lambda}$  antiproportional zur Wellenlänge  $\lambda$ . Hieraus folgt, unter Hinzunahme des Ergebnisses der Teilchenbewegung,

$$p \sim v \sim \frac{1}{R(t)}. \quad (27)$$

Somit ergibt sich ein Verhältnis für die Entwicklung der Wellenlänge im Verhältnis zu der Änderung von  $R(t)$

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_0} = \frac{R(t_1)}{R(t_0)}. \quad (28)$$

Daraus kann geschlossen werden, dass die Rotverschiebung eine Folge der Expansion des Universums ist. Das gleiche Ergebnis kann durch die klassische Betrachtung von emittierten Licht einer fernen Galaxie ermittelt werden. Das Licht soll bei  $r_1$  zum Zeitpunkt  $t_1$  emittiert werden und bei  $r_0$  zum Zeitpunkt  $t_0$  detektiert werden. Aus Gleichung (19) ergibt sich

$$\int_{t_1}^{t_0} \frac{dt}{R(t)} = \int_0^{r_1} \frac{dr}{(1 - kr^2)^{\frac{1}{2}}} = f(r_1). \quad (29)$$

Die Quelle und der Detektor stehen im mitbewegten System still, somit ist die linke Seite der Gleichung konstant. Daher darf sich auch die rechte Seite nicht ändern. Dies hat zur Folge, dass das linke Integral unabhängig vom Zeitpunkt des Aussendens des Lichtpulses sein muss. Dass die Integrale gleich sein müssen gilt auch für zwei Pulse im Zeitlichen Abstand einer Periodendauer  $T$

$$\int_{t_1}^{t_0} \frac{dt}{R(t)} = \int_{t_1+T_1}^{t_0+T_0} \frac{dt}{R(t)}. \quad (30)$$

Durch umstellen der Integrationsgrenzen ergibt sich

$$\int_{t_1}^{t_1+T_1} \frac{dt}{R(t)} = \int_{t_0}^{t_0+T_0} \frac{dt}{R(t)}. \quad (31)$$

Für die Lösung der Integration muss angenommen werden, dass der Skalierungsfaktor  $R(t)$  sich während der kurzen Periodendauer  $T$  nicht ändert. Dann erhält man das Verhältnis

$$\frac{T_1}{R(t_1)} = \frac{T_0}{R(t_0)} \Rightarrow \frac{\lambda_1}{\lambda_0} = \frac{R(t_1)}{R(t_0)}. \quad (32)$$

Hieraus resultiert die Rotverschiebung

$$1 + z = \frac{\lambda_0}{\lambda_1} = \frac{R(t_0)}{R(t_1)} \quad \text{mit} \quad (\lambda = cT), \quad (33)$$

wobei  $z$  die eigentliche Rotverschiebung ist.

### 3.5 Hubblesche Gesetz

Das Hubblesche Gesetz stellt einen wichtigen Zusammenhang zwischen der Entfernung eines Objekts und der Rotverschiebung des von ihm ausgesandten Lichts her. Zur Herleitung wird die rechte Seite der Gleichung (33) Taylorentwickelt

$$\frac{R(t_1)}{R(t_0)} = \frac{R(t_1)}{R_0} = 1 + H_0(t_1 - t_0) - \frac{1}{2}q_0H_0^2(t_1 - t_0)^2 + \dots \quad (34)$$

In der Gleichung sind die Abkürzungen  $H_0$  und  $q_0$  verwendet worden, diese haben jeweils ihre eigene Bedeutung. Zum einen wurde die Hubble-Konstante

$$H_0 = \frac{\dot{R}(t_0)}{R(t_0)} \quad (35)$$

eingeführt, zum anderen der Abbremsparameter

$$q_0 = \frac{-\ddot{R}(t_0)}{\dot{R}^2(t_0)} R(t_0) = -\frac{\ddot{R}(t_0)}{R(t_0) H_0^2}. \quad (36)$$

Als Hubble-Zeit wird das Inverse der Hubble-Konstante verwendet:  $H_0^{-1} = 9,78 \cdot 10^9 h^{-1} y$ .

## 4 Friedmann-Gleichung

### 4.1 Herleitung

Die Friedmann-Gleichung ist eine Lösung der Einsteingleichung der ART

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \frac{8\pi G_N}{c^4}T_{\mu\nu}. \quad (37)$$

Da die Symmetrie erhalten sein muss, muss der Energie-Tensor diagonal sein. Aufgrund der Isotropie des Universums, müssen alle Ortskomponenten identisch sein. Um dies zu erfüllen wird der Tensor einer idealen Flüssigkeit

$$T_\nu^\mu = \text{diag}(c^2\rho, -p, -p, -p) \quad (38)$$

mit der Divergenzfreiheit  $T_{;\nu}^\mu = 0$  verwendet. Wird  $\mu = 0$  gesetzt erhält man die erste Regel der Thermodynamik

$$d(\rho c^2 R^3) = -pd(R^3) \rightarrow dU = -pdV. \quad (39)$$

Für  $p = \omega\rho$  entwickelt sich die Energiedichte wie  $\rho \sim R^{-3(1+\omega)^{-1}}$ . Es gibt drei verschiedene Arten des Universums, ein strahlungsdominiertes Universum, ein materiedominiertes Universum und ein Universum wo die Vakuumsenergie dominiert. Für die Verschiedenen Universen gelten jeweils:

- Strahlung:  $(p = \frac{1}{3}\rho c^2) \rightarrow p \propto R^{-4}$
- Materie:  $(p = 0) \rightarrow \rho \propto R^{-3}$
- Vakuums Energie:  $(p = -\rho) \rightarrow \rho \propto \text{konst.}$

In der Einsteingleichung (37) sind die nicht verschwindenden Komponenten des Ricci-Tensors

$$R_{00} = -3\frac{\ddot{R}}{R} \quad (40)$$

$$R_{ij} = -\left[\frac{\ddot{R}}{R} + 2\frac{\dot{R}^2}{R^2} + \frac{2k}{R^2}\right]g_{ij} \quad (41)$$

und das Ricci-Skalar

$$\mathcal{R} = -6\left[\frac{\ddot{R}}{R} + \frac{\dot{R}^2}{R^2} + \frac{k}{R^2}\right] \quad (42)$$

enthalten. Aus der 00-Komponente der Einstein-Gl.(37) erhält man die Friedmann-Gleichung

$$\frac{\dot{R}^2}{R^2} + \frac{k}{R^2} = \frac{8\pi G}{3}\rho \quad (43)$$

und aus der ii-Komponente der Einstein-Gleichung die Friedmann-Gleichung

$$2\frac{\ddot{R}}{R} + \frac{\dot{R}^2}{R^2} + \frac{k}{R^2} = -8\pi Gp. \quad (44)$$

Mit der Energieerhaltung ergibt sich die Beschleunigung des komischen Skalenfaktors:

$$\frac{\ddot{R}}{R} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p). \quad (45)$$

## 4.2 Big Bang

Aus der Friedmann-Gleichung (43) und der Beschleunigung des kosmischen Skalenfaktors können Aussagen über den Ursprung des Universums gemacht werden. Betrachtet man den Fall, dass  $\dot{R}$  eine fallende positive Funktion ist, expandiert das Universum. An der Stelle an der die Gleichungen Singulär werden, existiert ein Nullpunkt des Universums. Dies ist eine erste Andeutung für den Big Bang als Ursprung des Universums. Die Extrapolation dieser Singularität ist mit der klassischen ART nicht möglich.

## 4.3 Die Entwicklung des Skalenfaktors

Die Expansionsrate des Universums ist durch den Hubble-Parameter

$$H = \frac{\dot{R}}{R}, \quad (46)$$

welcher nicht konstant ist, gegeben. Wird die Friedmann-Gleichung mit  $H^{-2}$  multipliziert

$$\frac{kc^2}{H^2 R^2} = \frac{8\pi G}{3H^2}\rho + \frac{\lambda c^2}{3H^2} - 1 = \frac{\rho_m}{\rho_c} + \frac{\rho_{vac}}{\rho_c} - 1 = \Omega_m + \Omega_{vac} - 1, \quad (47)$$

so ist diese dimensionslos. Hierbei wird

$$\Omega = \frac{\rho}{\rho_c} = \frac{3H^2}{8\pi G} \quad (48)$$

als Massendichte bzw. Vakuumsdichte eingeführt. Die Friedmann-Gleichung für die Expansionsrate ergibt sich somit zu

$$\frac{k}{H^2 R^2} = \Omega - 1. \quad (49)$$

In Abbildung 4 ist das Verhalten des Skalenfaktors im Verhältnis zur Zeit für verschiedene Werte von  $k$  aufgetragen. Für  $k = +1$  gilt  $\Omega > 1$  und beschreibt somit ein geschlossenes Universum. Wird  $k = 0$  gesetzt, so gilt  $\Omega = 1$  und das Universum ist flach. Im letzten Fall ist  $k = -1$  gesetzt und somit  $\Omega < 1$ , was zur Folge hat, dass das Universum offen ist.

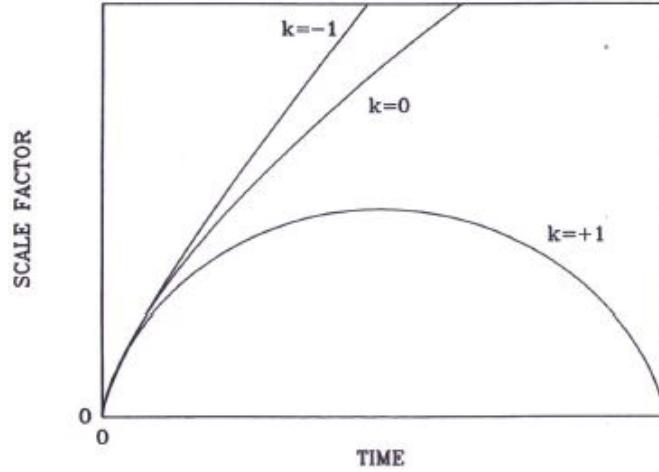


Abbildung 4: Verhalten von  $R(t)$  für  $\Omega_{vac} = 0$ [2]

#### 4.4 Abbremsparameter

Der Abbremsparameter wurde bereits im Abschnitt 3.5 eingeführt, wobei sich durch eine Taylorentwicklung

$$q_0 = -\frac{\ddot{R}}{RH_0^2} = -\frac{\ddot{R}_0}{R_0} \left( \frac{\dot{R}_0}{R_0} \right)^{-2} \quad (50)$$

ergab. Es ist zu erkennen, dass sich der Abbremsparameter aus den Gleichungen 43 und 45 zusammensetzt. Durch einsetzen der Gleichungen erhält man

$$q_0 = \Omega_0[1 + 3p/\rho]/2 = \Omega_0(1 + 3\omega)/2. \quad (51)$$

Hierbei entspricht  $\Omega_0$  der heutigen Dichte von Materie, Strahlung oder Vakuumsenergie im Universum. Betrachtet man das strahlungsdominierte Universum, so ergibt  $\omega = \frac{1}{3}$  einen Abbremsparameter von  $q_0 = \frac{\Omega_0}{2}$ . Das Vorzeichen des Abbremsparameter zeigt eine gebremste Ausdehnung des Universums an. Für das materiedominierte Universum ist  $\omega = 0$  was zu einem Abbremsparameter von  $q_0 = \Omega_0$  führt. Dies bedeutet ebenfalls eine Abbremsung der Expansion des Universums. Betrachtet man nun das Universum, welches von der Vakuumsenergiedichte dominiert wird, so erhält man aus  $\omega = -1$  einen Abbremsparameter von  $q_0 = -\Omega_0$ . Hierbei handelt es sich um eine beschleunigte Expansion des Universums. Die Vakuumsenergie wird heutzutage als dominierender Anteil des Universums gesehen.

#### 4.5 Alter des Universums

Eine Frage, die die Menschheit je her beschäftigt ist, wie alt das Universum ist. Mithilfe der Friedmann-Gleichung lassen sich Rückschlüsse auf das Alter des Universums tätigen.

Die zeitabhängige Materiendichte lässt sich mit  $\rho \propto R^{-3}$  als

$$\left( \frac{\dot{R}}{R_0} \right) + \frac{k}{R_0^2} = \frac{8\pi G}{3} \rho_0 \frac{R_0}{R} \quad (52)$$

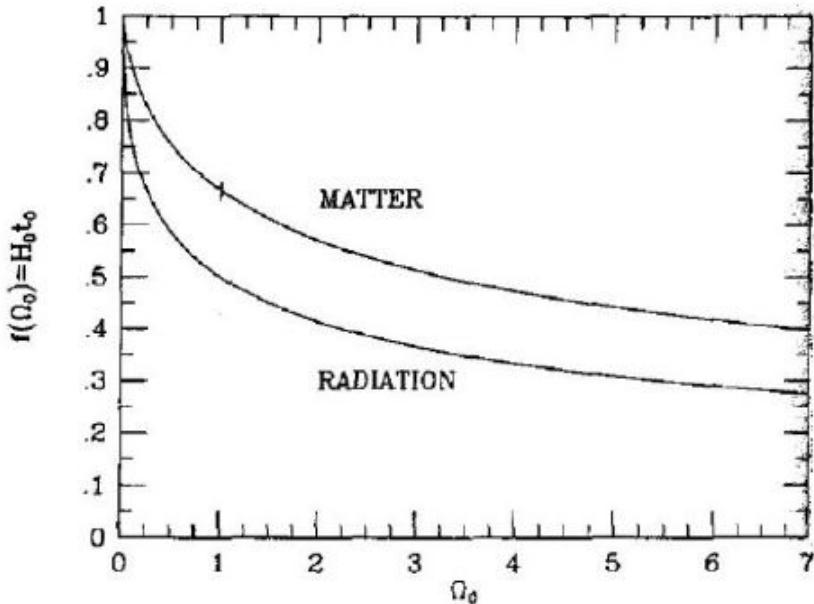
ausdrücken. Während die Strahlungsdichte mit  $\rho \propto R^{-4}$  als

$$\left( \frac{\dot{R}}{R_0} \right) + \frac{k}{R_0^2} = \frac{8\pi G}{3} \rho_0 \left( \frac{R_0}{R} \right)^2 \quad (53)$$

ausgedrückt werden kann.

Mit  $k/R_0^2 = H_0^2(\Omega_0 - 1)$  und  $R_0/R = 1 + z$  führt die Friedmann-Gleichung durch Trennung der Variablen und Aufintegration zu

$$t = \int_0^{R(t)} \frac{dR'}{\dot{R'}}. \quad (54)$$

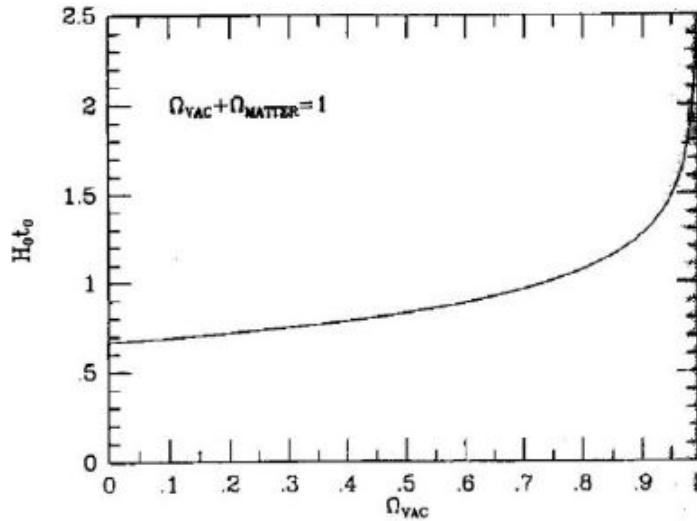


**Abbildung 5:** Alter des Universums in Abhängigkeit von der Dichte[2]

In der Abbildung 5 sind die Ergebnisse für das materiedominierte und das strahlungsdominierte Universum dargestellt. Das Alter des Universums ist in Abhängigkeit von der Dichte  $\Omega_0$  aufgetragen. Die Kurven fallen ab. Dies stimmt mit den Ergebnissen aus dem vorherigen Abschnitt überein. Je größer der Faktor  $\Omega_0$  wird um so größer wird der Abbremsparameter. Dies bedeutet, dass im frühen Universum eine schnellere Expansion statt fand. Bei dem strahlungsdominierten Universum war der Abbremsparameter kleiner als bei dem materiedominierten Universum. Dies deckt sich mit der Tatsache, dass in Abbildung 5 das strahlungsdominierte Universum jünger ist als das materiedominierte Universum.

## 4.6 Betrachtung eines flachen Universums

In der Abbildung 6 ist das Alter eines flachen Universums  $k = 0$  gegen die Vakuumsdichte aufgetragen, hierbei wurde die Kosmologische Konstante  $\Lambda$  mit einbezogen um für das heutige Universum genauere Aussagen treffen zu können. Die Gesamtdichte berechnet



**Abbildung 6:**

Das Alter des Universums in Abhängigkeit von der Vakuumsenergiedichte[2]

sich aus der positiven Materie und Vakuumsenergie  $\Omega_0 = \Omega_{\text{Vak}} + \Omega_{\text{Mat}} = 1$ . Betrachtet man die Kurve, so fällt auf das bei einer Vakuumsdichte von  $\Omega_{\text{Vak}} \geq 0,74$  das Alter des Universums größer als die Hubble-Zeit wird.

## 5 Zusammenfassung

Die Erkenntnisse der Allgemeinen Relativitätstheorie führten zu einem besseren Verständnis des Universums. Mit der Robertson-Walker-Metrik folgten Ergebnisse zu der Rotverschiebung, der Lichtausbreitung und der Teilchenbewegung. Die Friedmann-Gleichung brachte schließlich Aufschlüsse über die Entstehung des Universums, die Expansion und das Alter. Auch wenn die Ergebnisse nicht exakt sind, geben sie dennoch ein qualitatives Verständnis. Um exaktere Ergebnisse zu erzielen müssen weitere Faktoren berücksichtigt werden, wie zum Beispiel die verschiedenen Epochen des Universums und welche dominierende Energieform vorlag.

## Literatur

[1] A. Einstein. *Über die spezielle und die allgemeine Relativitätstheorie*. Springer, 2002.

- [2] M. S. Turner E.W. Kolb. *The Early Universe*. Frontiers in Physics, 1994.
- [3] T. Fließbach. *Allgemeine Relativitätstheorie*. 2012.
- [4] A. Goobar L. Bergström. *Cosmology and particle astrophysics*. Springer, 2006.
- [5] M. Michael. Die Robertson-Walker-Metrik und die Friedmann-Gleichung. <http://pauli.uni-muenster.de/tp/fileadmin/lehre/teilchen/ws1112/FRWMetrikFriedmannGleichung.pdf>.
- [6] E. Rebhan. *Theoretische Physik: Relativitätstheorie und Kosmologie*. Spektrum, 2011.