Primordiale Nukleosynthese
Seminar zur Theorie der Teilchen und Felder

Matthias Holtkemper

14. Februar 2012

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Die Nukleosynthese beschäftigt sich mit der Herkunft der verschiedenen Atomkerne. Dazu ist es notwendig sich klar zu machen, welche Vorraussetzungen man für eine Kernumwandlung braucht. Haben wir zwei Kerne, so müssen diese erst einmal eine gewisse kinetische Energie besitzen, um das abstoßende Coulombpotential der Protonen zu überwinden und reagieren zu können. Diese anfängliche kinetische Energie liegt zufällig genau im Bereich der Bindungsenergie, also bei einigen MeV pro Nukleon. Diese Energiedichten werden in unserer Umgebung vor allem in Sonnen (Solare Nukleosynthese), bei Kernzerfällen und in kosmischer Strahlung beobachtet. Seit einigen Jahren ist es auch dem Menschen gelungen, durch elektromagnetische Felder solche Energiedichten zu erstellen. Im folgenden Text wird noch eine andere theoretische Umgebung beschrieben, in der solch hohe Energiedichten auftreten, nämlich eine Zeit kurz nach dem Urknall (zwischen 10 ms und 3 min nach dem Urknall, was Temperaturen zwischen 10 und 0,1 MeV entspricht). In dieser primordialen Nukleosynthese sind mit Abstand die meisten Elemente des Universums entstanden. Um die Entstehung nun quantitativ zu betrachten, muss man zum einen eine Anfangsverteilung vorgeben. Diese wird über thermodynamische Betrachtungen gewonnen und kann im Folgenden Text nachvollzogen werden. Zum anderen müsste man für die weitere Entwicklung der verschiedenen Kernkonzentrationen alle möglichen Kernreaktionen mit ihren Reaktionsraten betrachten. So ein Reaktionsnetzwerk ist numerisch berechenbar und existiert zB. als ständig aktualisierte Fortran-Version. Da dies aber nicht anschaulich ist und der größte Teil der Reaktionen vernachlässigbar langsam abläuft, können wir hier in guter Näherung nur einzelne Reaktionen betrachten, dann ermitteln, zu welchem Zeitpunkt die Reaktionsraten zu klein werden, um die Gleichgewichtskonzentration der sich ändernden Temperatur anzupassen und dann über qualitative Argumente den weiteren Verlauf der Konzentrationen beschreiben. Dabei werden wir die Häufigkeiten von Wasserstoff und Helium vorhersagen können und Argumente dafür finden, dass alle anderen Elemente nur in Spuren auftreten. Um danach die Theorie mit Experimenten vergleichen zu können, werden wir auf die numerischen Berechnungen der Ratengleichungsnetzwerke zurückgreifen und schließlich noch einige Konsequenzen der Theorie diskutieren.

2 Vorüberlegungen zum Gleichgewicht

2.1 Im thermodynamischen Gleichgewicht

Nach Definition in der Statistik gilt für die Teilchenzahldichte:

$$n = \frac{g}{(2\pi)^3} \int f(p) d^3p$$

Dabei ist g der Freiheitsgrad der betrachteten Teilchenart und f ihre Verteilungsfunktion. Diese wird in der statistischen Physik über die Entropiemaximierung im großkanonischen Potential für Fermionen (mit +) und Bosonen (mit -) ermittelt zu:

$$f = \frac{1}{e^{\frac{E-\mu}{T}} \pm 1}$$

Hierbei sollte man sich in Erinnerung rufen, dass im Modell des großkanonischen Potentials Teilchen beliebig erzeugt und vernichtet werden können. Das ist hier natürlich nicht der Fall, weshalb wir im Folgenden nur Verhältnisse von Teilchensorten betrachten werden, die sich ineinander umwandeln können. Mit diesen Einschränkungen können wir durch Integration die formale Lösung der Teilchenzahldichte zu

$$n = \begin{cases} g\left(\frac{mT}{2\pi}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{m-\mu}{T}} & \text{für T} \ll \text{m (nichtrelativistisch)} \\ \\ \frac{\varsigma(3)}{\pi^2} g T^3 & \text{für T} \gg \text{m (relativistische Bosonen)} \\ \\ \frac{3\varsigma(3)}{4\pi^2} g T^3 & \text{für T} \gg \text{m (relativistische Fermionen)} \end{cases}$$

bestimmen. Da alle Barionen zu dieser Zeit nichtrelativistisch sind, brauchen wir für diese die erste Lösung. Die zweite Lösung beschreibt die Teilchenzahldichte von zB. Photonen.

2.2 Im chemischen Gleichgewicht

Im chemischen Gleichgewicht muss $\mu_{Edukt} = \mu_{Produkt}$ gelten. Außerdem sollte erwähnt sein, dass das chemische Potential eine extensive Größe darstellt, sich also additiv verhält. Um dies zu verdeutlichen betrachten wir das später benötigte Beispiel: Für die Reaktion

$$n + \nu \rightleftharpoons p + e^-$$

gilt im chem. Gleichgewicht

$$\mu_n + \mu_\nu = \mu_p + \mu_{e^-}$$

.

2.3 Kerne im Gleichgewicht

In der Ausgangssituation der Nukleosynthese sind die leichten Kerne im Gleichgewicht. Daher wollen wir hier eine Berechnung der Gleichgewichtszustände der Kerne mit Massenzahl A vornehmen. Dazu benötigen wir die oben berechnete Teilchenzahldichte

$$n_A = g_A \left(\frac{mT}{2\pi}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{m_A - \mu_A}{T}}$$

, drücken in dieser das chem. Potential durch die Einzelpotentiale der Nukleonen

$$\mu_A = Z\mu_p + (N - Z)\mu_n$$

aus und die Masse durch die Bindungsenergie

$$B_A = Zm_p + (A - Z)m_n - m_A$$

. Da wir nur Verhältnisse der Zustandsdichten sinnvoll theoretisch beschreiben und beobachten können, ist es sinnvoll die Menge einer Teilchensorte über den Anteil an Nukleonen X_A in dieser Teilchensorte zur gesamten Nukleonenzahl auszudrücken.

$$X_A = \frac{n_A A}{n_N} \qquad \text{mit} \qquad n_N = \sum_A A \cdot N_A$$

Dabei ist n_N die Anzahl aller Nukleonen. Da diese experimentell auch nicht zugänglich ist, wird sie über das Verhältnis von Barionen zu Photonen η ausgedrückt.

$$\eta = \frac{n_N}{n_\gamma} \qquad \text{mit} \qquad n_\gamma = \frac{2\varsigma(3)}{\pi^2} T^3$$

Die Anzahl der Photonen ist über die kosmische Hintergrundstrahlung gut zu quantifizieren (Über COBE und WMAP-Experimente). Fasst man all diese Gleichungen zusammen, erhält man:

$$X_A = g_A \left(\frac{\varsigma(3)\eta}{\pi^{1/2}}\right)^{A-1} 2^{(3A-5)/2} A^{5/2} \left(\frac{T}{m_n}\right)^{3(A-1)/2} X_p^Z X_n^{(A-Z)} e^{B_A/T}$$

Damit ist die relative Häufigkeit einer Teilchenart im Gleichgewicht zum einen von dem Verhältnis von Temperatur zu Bindungsenergie abhängig. Dies ist verständlich, da die Teilchen keine Bindungen eingehen können, wenn sie zu große thermische Geschwindigkeiten besitzen. Zum anderen spielt das Barionen zu Photonen Verhältnis eine Rolle. Wir werden später sehen, dass die Kerne trotz unterschreiten der Bindungsenergie nicht fähig sind stabile Bindungen aufzubauen, da diese zu schnell wieder von der wesentlich größeren Anzahl der Photonen zerschossen werden. Zur Veranschaulichung einiger Häufigkeiten betrachte man die unten dargestellte Tabelle für $\eta = 10^{-10}$ und $T = 10$ MeV.

X_n	0,5
X_p	0,5
X_2	$6 \cdot 10^{-12}$
X_3	$2 \cdot 10^{-23}$
X_4	$2 \cdot 10^{-34}$
X_{12}	$2 \cdot 10^{-126}$
1	$=X_n + X_p + X_2 + X_3 + X_4 + X_{12}$

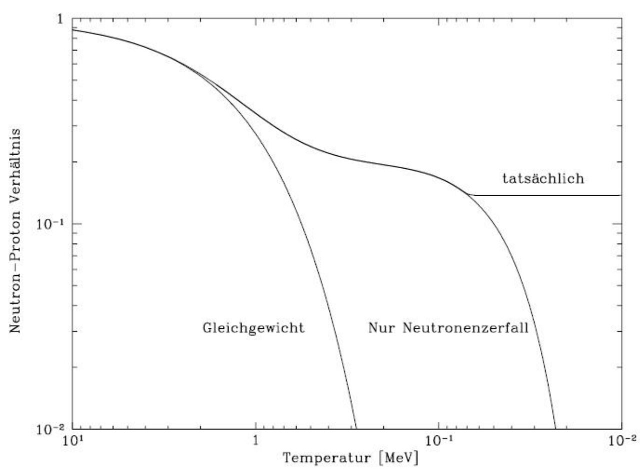
Mit diesen Überlegungen haben wir eine Startkonfiguration für unser Ratengleichungssystem erhalten. Im Folgenden wollen wir eine anschauliche Näherung nachvollziehen.

2.4 Das Verhältnis n zu p im Gleichgewicht

Da nun die Kerne im Gleichgewicht in vernachlässigbarer Häufigkeit auftreten, ist erst einmal nur die Anzahl von Neutronen und Protonen entscheident. Wir wollen hier das Verhältnis dieser Nukleonen betrachten. Dieses ergibt nach einfacher Division der Teilchenzahldichten

$$\frac{n_{\mathrm{n}}}{n_{\mathrm{p}}} = \frac{n}{p} = e^{-\frac{Q}{T} + \frac{\mu_{e^-} - \mu_\nu}{T}}$$
$$\approx e^{-\frac{Q}{T}}$$

mit $Q = m_n - m_p = 1,293$ MeV. $\frac{\mu_{e^-}}{T}$ und $\frac{\mu_\nu}{T}$ können zu η abgeschätz werden, was in der Größenordnung von 10^{-10} liegt und vernachlässigbar ist. Der Verlauf dieses Verhältnisses ist in der folgenden Abbildung dargestellt.



Man sieht, dass der genaue Zeitpunkt entscheidend ist, an dem das Verhältnis das Gleichgewicht verlässt.

3 Bedingung für das Gleichgewicht

Unsere Überlegungen zum thermodynamischen Gleichgewicht im großkanonischen Ensemble beinhalten die Tatsache, dass die Bildung einiger Teilchen energetisch über ihre Bindungsenergie (also den Massendefekt bei Reaktionen mit anderen Teilchen) bevorzugt wird, aber auch die kinetische Energie der Teilchen (über ihre Temperatur), wodurch diese Bindungen wieder zerschossen werden. Dabei gehen wir davon aus, dass die Teilchen „schnell genug" miteinander wechselwirken, um ein Gleichgewicht aufzubauen (dabei wird die Art der Reaktionen außer acht gelassen). Können sie nicht mehr „schnell genug" Wechselwirken, wird der aktuelle Zustand erhalten und hinkt dem Gleichgewichtszustand hinterher. Hier gehen wir meist näherungsweise davon aus, dass beim Fall einer Teilchensorte aus dem Gleichgewicht, der momentane Zustand für immer beibehalten wird und keinerlei Wechselwirkung mit dem Rest der Teilchen mehr stattfinden kann. Dies nennt man „entkoppeln" oder „ausfrieren" einer Teilchensorte. Nach dem ausfrieren entwickelt sich die Temperaturverteilung dieser Teilchenart unabhängig von der der anderen Teilchen.
Hier ist nun die genaue Definition von „schnell genug" miteinander Wechselwirken wichtig. Dies hängt natürlich von den einzelnen Reaktionen ab, mit denen ein Teilchen in Verbindung mit dem Rest der Telchensorten steht, weshalb man auch sagt, dass eine Wechselwirkung „ausfriert". Eine Teilchensorte friert nun dann aus, wenn die letzte Wechselwirkung, die diese Teilchen mit dem Rest der Teilchen im Universum (mit dem „Plasma") im Gleichgewicht hält, ausfriert.
„Schnell genug" heißt nun, dass die Änderung der Temperatur langsamer stattfindet, als die Anpassung der Konzentrationsverhältnisse des Systems über die einzelnen Reaktionen. Dies wird im Falle des expandierenden Universums natürlich noch komplizierter, also wollen wir kurz den mathematischen Weg beschreiben:
Es gibt grundsätzlich zwei Möglichkeiten Systeme in der Nichtgleichgewichtsthermodynamik zu beschreiben. Zum einen mithilfe der Boltzmanngleichung, die den Grenzfall für große freie Weglängen der Reaktionspartner beschreibt (d.h. nur Stöße von zwei Teilchen betrachtet) und hier verwendet werden muss, und zum anderen die besser bekannte Navier-Stokes-Gleichung, die im Grenzfall kleiner freier Weglängen Verwendung findet (also auch Stöße von mehr als zwei Teilchen berücksichtigt). Nun ergibt sich nach längeren thermodynamischen Betrachtungen der Boltzmanngleichung mit Hilfe der Robertson-Walker-Metrik, der Vernachlässigung chemischer Potentiale, einer schneller ablaufenden Rückreaktion und weiteren Bedingungen (siehe Kai Walter: Die Thermodynamik des Universums) folgende Abhängigkeit:

$$\frac{\Delta X_A}{X_A} \sim \frac{\Gamma}{H} \tag{1}$$

Damit folgt die Bedingung für ein Gleichgewicht der Teilchen, die bei einer Reaktion beteiligt sind über:

$$\frac{\Gamma}{H} \gg 1 \tag{2}$$

Dabei ist $\Gamma = n_{EQ}\langle\sigma|v|\rangle$ die Reaktionsrate und $H = 1,66 g^* T^2 \frac{1}{m_{Pl}}$ die Expansionsrate des Universums während der strahlungsdominierten Epoche mit der Planckmasse m_{Pl} und dem effektiven Freiheitsgrad

$$g_* = \sum_{Bosonen} g_i \left(\frac{T_i}{T}\right)^4 + \frac{7}{8} \sum_{Fermionen} g_i \left(\frac{T_i}{T}\right)^4$$

. Dieser beschreibt die Summe aller Freiheitsgrade der auftretenden Teilchensorten, wobei die Beiträge der nicht relativistischen Teilchensorten vernachlässigt werden. (Er wird in der Herleitung der Expansionsrate eingeführt, da sich mit seiner Hilfe der Druck und die Dichte kompakt darstellen lassen.) Dies wird später wichtig, da er von der Anzahl der relativistischen Teilchensorten abhängt, also in unserem Fall unter anderem von der Anzahl der verschiedenen Neutrinoarten.
Um diese Ergebnisse zu veranschaulichen, wird häufig folgende Vorstellung vermittelt. Man betrachte die inverse Reaktionsrate als eine mittlere freie Weglänge, die dann größer sein muss als der Hubbleabstand, damit die Reaktionspartner schnell genug reagieren, um ein Gleichgewicht aufrecht erhalten zu können. Andernfalls dehnt sich der Raum zwischen den Teilchen so schnell aus, dass die Teilchen nicht mehr zur Kollision kommen können und das Gleichgewicht gebrochen wird.

3.1 Bedingung für ein Gleichgewicht der Umwandlung von Protonen und Neutronen

Um nun die Temperatur zu berechnen, bei der die gegenseitige Umwandlung von Protonen und Neutronen „ausfriert“, also aus dem Gleichgewicht läuft und $\frac{n}{p}$ annähernd konstant bleibt, muss die Reaktionsrate genauer bestimmt werden. Hier treten die Reaktionen

$$n + \nu \rightleftharpoons p + e^-$$

$$n + e^+ \rightleftharpoons p + \overline{\nu}$$

auf. Wir betrachten die erste Reaktion (die zweite läuft schon früher aus dem Gleichgewicht), von der die Reaktionsrate nach Integration des Matrixelementes des Übergangs über den Phasenraum gegen

$$\Gamma_{pe^- \to n\nu} = \begin{cases} \frac{7}{60}\pi(1+3g_A^2)G_F^2 T^5 & \text{für T} \gg \text{Q}, m_e \\ \frac{T^3}{\tau_n m_e^3} e^{-\frac{q}{T}} & \text{für T} \ll \text{Q}, m_e \end{cases}$$

geht. Damit ist

$$\frac{\Gamma}{H} \approx \left(\frac{T}{0,8\text{MeV}}\right)^3$$

gegeben, woraus man ablesen kann, dass diese Reaktion bei $T = 0,8$ MeV aus dem Gleichgewicht läuft. Zu bemerken sei noch, dass die Teilchen der Rückreaktion, wie oben gefordert, stärker Wechselwirken, als die der Hinreaktion.

4 Ablauf der primordialen Nukleosynthese

4.1 Im Gleichgewicht

Wir befinden uns 10 ms nach dem Urknall bei einer Temperatur von 10 MeV. Die Temperatur aller relativistischen Teilchen($\gamma, e^{\pm}, \nu_{e\mu,\tau}$) ist gleich, wodurch ein effektiver Freiheitsgrad von $g_* = 10{,}75$ zustande kommt. Daher liegen die leichten Kerne, Neutronen und Protonen im Gleichgewicht vor. Das Verhältnis von Neutronen zu Protonen beträgt eins und die leichten Elemente liegen nur in Spuren vor.

4.2 Das Gleichgewicht wird gebrochen

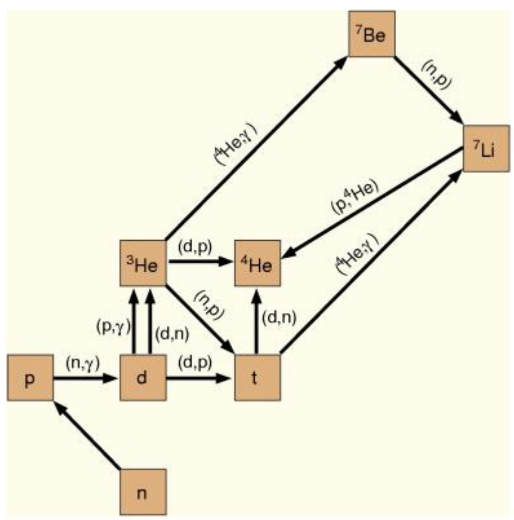
Wir befinden uns 1 s nach dem Urknall bei einer Temperatur von 1 MeV. Dies ist der Punkt, an dem die Reaktion $n + \nu \rightleftharpoons p + e^-$ ausfriert, also nicht mehr stattfindet. Dabei entkoppeln die Neutrinos, die Elektronen bleiben über Paarerzeugung/vernichtung noch im Gleichgewicht und Neutronen und Protonen werden nur noch über den Neutronenzerfall ineinander umgeformt. Das Verhältnis von Neutronen zu Protonen beträgt zu diesem Zeitpunkt $\frac{n}{p} = \frac{1}{6}$. Die aus dieser Zeit entkoppelten Neutrinos werden als Neutrinohintergrundstrahlung erwartet. Die Elektronen annihilieren kurz später (bei etwa 0,5 MeV) und geben ihre Energie dabei an die Photonen ab. Daher erwartet man für den Neutrinohintergrund eine geringere Energie als für den Photonenhintergrund (der außerdem erst wesentlich später bei Bindung der verbleibenden Elektronen an die Kerne von der barionischen Materie entkoppelt und sich damit das „Urplasma“ komplett auflöst). Die Häufigkeiten der leichten Kerne hat sich zum vorherigen Schritt nicht verändert. Die einzig verbleibende Reaktion, die nun eine Rolle spielt,ist der Zerfall der freien Neutronen.

4.3 Die Kerne werden gebildet

Der Zerfall der freien Neutronen bleibt wichtig, bis sich die Kerne bilden. Dies geschieht zwischen 1und 3 Sekunden nach dem Urknall bei 0,3 bis 0,1 MeV. Zu diesem Zeitpunkt befinden sich nur noch Photonen als relativistische Teilchen in Wechselwirkung mit der barionischen Materie, wodurch der effektive Freiheitsgrad einen Wert von $g_* = 3{,}36$ annimmt. Das Verhältnis zwischen Neutronen und Protonen beträgt (nach Neutronenzerfall) noch etwa $\frac{n}{p} = \frac{1}{7}$ (Gleichgewichtswert wäre $\frac{n}{p} = \frac{1}{74}$). Nun binden sich fast alle Neutronen zu ^{4}He, so dass grob gesagt 25 % Helium und 75 % Wasserstoff entstanden ist.

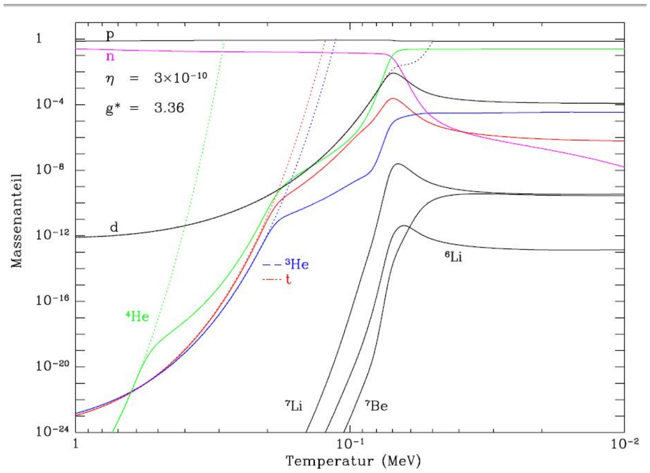
4.3.1 Deuterium Flaschenhals

Nach Gleichung 2.3 müssten sich bei sinkender Temperatur im Gleichgewicht zuerst die Kerne mit der höchsten Bindungsenergie bilden, also Eisenkerne. Dies geschieht nicht, da wir nur Zweikörperreaktionen betrachten, da die Wahrscheinlichkeiten für Mehrkörperreaktionen aufgrund der geringen Dichte zu klein sind. Diese kommen erst später in Sonnen vor und sollen hier nicht mehr beschrieben werden. Also kann Eisen nur aus einer Reaktion von zwei kleineren Kernen entstehen, die aber noch nicht stabil gebildet werden können. Daher gibt es keine Reaktion, die Eisen so schnell produzieren kann, dass die Eisenkonzentration ins Gleichgewicht kommen kann. So kann nun kein Element erzeugt werden, bevor nicht Deuterium stabil erzeugt werden kann. Ist diese Temperatur erreicht, so bildet sich schnell ^{4}He. Alle höheren Elemente können wieder nicht entstehen, da es keine stabilen Isotope mit Ordnungszahl 5 oder 8 gibt und die die einzigen Isotope, die mit höherer Ordnungszahl stabil entstehen können (^{6}Li und ^{7}Li) kleinere Bindungsenergien als ^{4}He besitzen. Über Zweikörperreaktionen kann daher nur ^{4}He erzeugt werden, weshalb sich alle Neutronen in ^{4}He binden (siehe Abb. **??**).

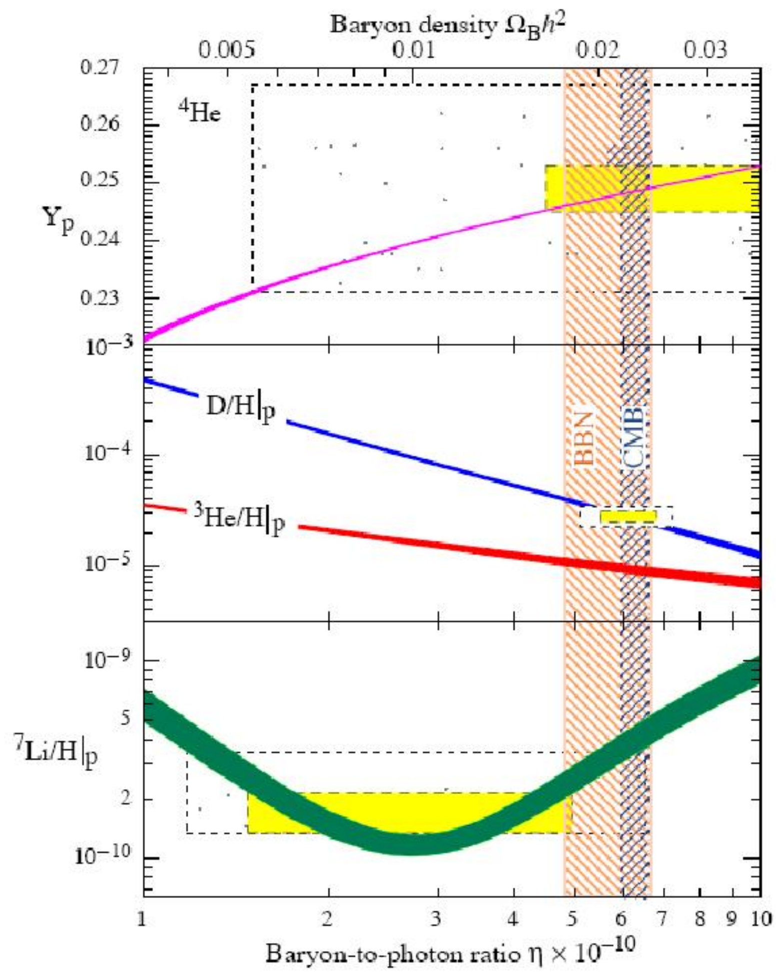


5 Vergleich mit Experimenten

Die Ratengleichungssysteme ergeben für den Verlauf der Konzentrationen die in Abb. **??** dargestellten Ergebnisse.



Damit erhält man für die heutige Verteilung der Elemente im Universum folgende Ergebnisse:



Diese hängen von dem Verhältnis von Barionen zu Photonen, der Halbwertszeit der Neutronen und der Anzahl der Neutrinoflavours ab. Die ^{7}Li-Kurve hat ein Minimum, da im kleinen Bereich von η die Reaktion

^{4}He(^{3}H,γ)^{7}Li überwiegt und im höheren Bereich die Reaktion ^{4}He(^{3}He,γ)^{7}Be(e$^-$,ν)^{7}Li. Im mittleren Gebiet wird wenig ^{7}Li erzeugt. In Abb. **??** werden die experimentell bestimmten Daten mit den hier errechneten Werten verglichen. Man sieht, dass dieses Modell die Beobachtungen gut erklärt. Damit liefert das Modell der Nukleosynthese eine wichtige Stütze der Urknalltheorie und des Standartmodells der Teilchenphysik. Des weiteren kann man aus diesen Ergebnissen ablesen, dass die Anzahl der Neutrinoarten kleiner gleich vier sein muss und die Barionendichte im Universum $0,023 \leq \Omega_B \leq 0,047$ betragen muss. Andere Quellen liefern Werte von $\Omega \geq 0,15 \quad \text{oder} \quad 0,2 \pm 0,1$. Diese Differenz wird versucht über die Existenz dunkler Materie zu erklären.

6 Zusammenfassung

- n und p im Gleichgewicht bis Universum zu kalt und zu groß wird um WW aufrecht zu erhalten
- Neutronen wandeln sich in ^{4}He um, andere leichte Elemente sehr selten
- 25 % Helium und 75 % Wasserstoff
- Beobachtungen bestätigen (Urknall-) Theorie
- Vorhersage der Anzahl der Neutrinoarten bestätigt
- Aussage zu Barionen zu Photonenverhältnis möglich