

Einführung in die Supersymmetrie
Zusammenfassung zum Vortrag vom 02.02.2011

Peter Kettmann

26. März 2011

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	3
2	Das einfachste Modell	4
2.1	SUSY-Operatoren	4
2.2	Ein Beispiel: Der SUSY-Oszillator	5
3	Nichtlineare Supersymmetrie	7
3.1	Verallgemeinerte Operatoren	7
3.2	Die Kanonische Darstellung	7
3.3	Das Superpotential	8
3.4	Das Eigenwertspektrum	9
4	Supersymmetrische Quantenmechanik	12
4.1	Eigenwerte und Eigenzustände	12
4.2	Vom Grundzustand zum Superpotential	13
4.3	Beispiel: Der supersymmetrische Oszillator II	14
4.4	Beispiel 2: Das Kastenpotential	15

Kapitel 1

Einleitung

Bei der Supersymmetrie, kurz SUSY, betrachtet man das Verhalten eines physikalischen Systems bei der Umwandlung eines Bosons in ein Fermion und umgekehrt. Diese Umwandlung wird dabei vermittelt durch den Umwandlungsoperator Q . Ein System ist demnach supersymmetrisch, wenn die Relation

$$Q|Boson\rangle \sim |Fermion\rangle \quad \text{und} \quad Q|Fermion\rangle \sim |Boson\rangle. \quad (1.1)$$

gilt, wobei $|Boson\rangle$ bzw. $|Fermion\rangle$ einen bosonischen/fermionischen Zustand beschreibt. Diese Begriffe werden im Laufe der Zusammenfassung weiter erläutert. Nach Gleichung (1.1) werden die beiden sonst ja sehr unterschiedlichen Teilchenklassen der Bosonen und Fermionen im Zuge der Supersymmetrie vereinigt.

Der Nutzen der Supersymmetrie erschließt sich besonders im Rahmen des Standard-Modells. So wird durch dessen supersymmetrische Erweiterung u.a. das Hierarchieproblem gelöst und eine Vereinigung der Wechselwirkungen auf großen Energieskalen erreicht. Zudem wird die Gravitation überhaupt erst beschrieben. Die folgenden Ausführungen sollen sich der Einfachheit halber allerdings dennoch auf eine einfache Einführung und einige Anwendungen auf die nicht relativistische Quantenmechanik beschränken.

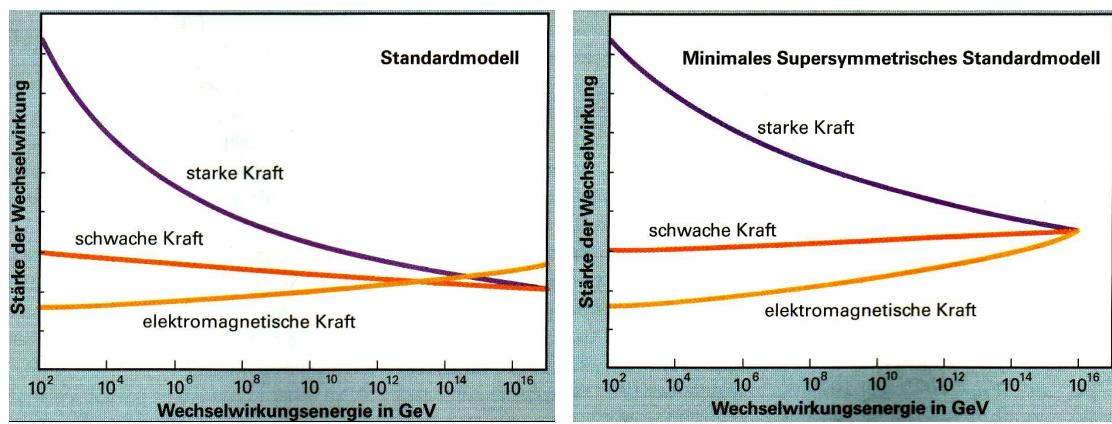


Abbildung 1.1: Verhalten der Kopplungsstärken ohne/mit Supersymmetrie.¹

Kapitel 2

Das einfachste Modell

In diesem Teil geht es zunächst darum, die grundlegende Struktur der Supersymmetrie, d.h. eine erste Beschreibung der SUSY-Operatoren, zu liefern. Damit lässt sich bereits ein einfaches Beispiel behandeln.

2.1 SUSY-Operatoren

Wie schon durch Gleichung (1.1) beschrieben, wird ein Operator gesucht, der einen fermionischen Zustand in einen bosonischen umwandelt und umgekehrt:

$$Q |Boson\rangle \sim |Fermion\rangle \quad \text{und} \quad Q |Fermion\rangle \sim |Boson\rangle. \quad (2.1)$$

Dabei bezeichnet man einen Zustand ohne Fermionen als bosonisch und einen mit einem Fermion (aufgrund des Pauli-Prinzips, darf nur eines in einem Zustand existieren) als fermionisch:

$$|Boson\rangle := |n_B, n_F = 0\rangle \quad \text{und} \quad |Fermion\rangle = |n_B 1\rangle. \quad (2.2)$$

Die gewünschte Umwandlung ist also mit Gleichheit gewährleistet, wenn ein Fermion in ein Boson umgewandelt wird oder umgekehrt. Ein geeigneter Ansatz für Umwandlungsoperatoren Q_{\pm} ist also

$$Q_+ = b^- f^+ \quad \text{und} \quad Q_- = b^+ f^-, \quad (2.3)$$

wobei b^{\pm} und f^{\pm} die bosonischen/fermionischen Erzeuger und Vernichter sind. Die durch Gleichung (2.3) definierten Operatoren wirken aufgrund des Pauli-Prinzips nur in eine Richtung, da $Q_+ |n_B 1\rangle = 0$ und $Q_- |n_B 0\rangle = 0$:

$$Q_+ |n_B n_F\rangle = |n_B - 1, n_F + 1\rangle \quad (2.4)$$

$$Q_- |n_B n_F\rangle = |n_B + 1, n_F - 1\rangle. \quad (2.5)$$

Die Nilpotenz der Operatoren wird dabei allein durch das Vorkommen der fermionischen Operatoren gewährleistet, da $(f^{\pm})^2 = 0$. Für alle erweiterten Ansätze sollten diese Operatoren daher ebenfalls verwendet werden.

Die Struktur des supersymmetrischen Hamiltonoperators ergibt sich allein aus der Tatsache, dass dieser mit den SUSY-Operatoren vertauschen muss, da die Energie eines supersymmetrischen Systems unter den vermittelten Transformationen erhalten sein muss:

$$[H_S, Q_{\pm}] \stackrel{!}{=} 0. \quad (2.6)$$

Ein geeigneter Ansatz wäre demnach $H_S = \{Q_+, Q_-\} = Q_+Q_- + Q_-Q_+$.

Da Q_\pm aber nicht hermitesch ist ($(Q_\pm)^\dagger = Q_\mp$) und zudem die in Gleichung (2.1) geforderte Bedingung nicht vollständig erfüllt (beide Richtungen sollten durch ein Q möglich sein), definiert man sich die zwei hermitesch Operatoren

$$Q_1 = Q_+ + Q_- \quad \text{und} \quad Q_2 = -i(Q_+ - Q_-). \quad (2.7)$$

Diese erfüllen die gewünschten Bedingungen. Zudem gilt: $\{Q_1, Q_2\} = 0$. Der Hamiltonoperator ergibt sich damit zu:

$$H_S = Q_1^2 = Q_2^2. \quad (2.8)$$

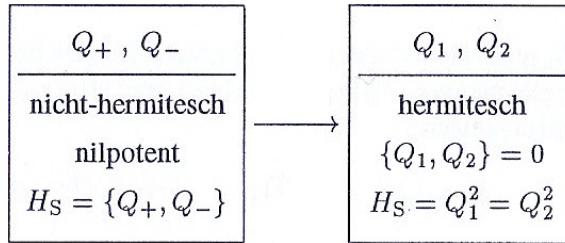


Abbildung 2.1: Die zwei Sätze von SUSY Operatoren.²

Dieses Modell ist zwar sehr einfach gestrickt, die hergeleiteten Eigenschaften der Q -Operatoren und die Struktur des Hamiltonoperators gelten jedoch allgemein. So kann z.B. schon der eindimensionale harmonische Oszillator in diesem Modell behandelt werden.

2.2 Ein Beispiel: Der SUSY-Oszillatator

Zur Behandlung dieses Falles betrachte man zunächst den bosonischen und den fermionischen Oszillatator:

$$H_B = \hbar\omega_B (b^+b^- + \frac{1}{2}) \quad \text{mit} \quad E_{n_B} = \hbar\omega_B (n_B + \frac{1}{2}) \quad (2.9)$$

$$H_F = \hbar\omega_F (f^+f^- - \frac{1}{2}) \quad \text{mit} \quad E_{n_F} = \hbar\omega_F (n_F - \frac{1}{2}). \quad (2.10)$$

Wählt man als Ansatz für die SUSY-Operatoren $Q_+ = \sqrt{\hbar\omega} b^- f^+$ und $Q_- = \sqrt{\hbar\omega} b^+ f^-$ erhält man sofort den Hamiltonoperator des SUSY-Oszillators:

$$H_S = \{Q_+, Q_-\} = \hbar\omega (b^+b^- + f^+f^-) = H_B + H_F \quad \text{mit} \quad E = \hbar\omega (n_B + n_F). \quad (2.11)$$

Dieser besteht also aus der direkten Summe der beiden Einzeloszillatoren mit gleichen Eigenfrequenzen. Durch $\omega_B = \omega_F$ wird ein Bose-Fermi-Oszillatator also zum SUSY-Oszillatator. Das Energiespektrum des SUSY-Oszillators ist in Abb. 2.2 dargestellt. Hier kann man bereits einige für alle supersymmetrischen Systeme gültige Eigenschaften ablesen. So sind alle Energien bis auf die des Grundzustands zweifach entartet. Letztere liegt im bosonischen (oder allgemein z.T. auch im fermionischen) Sektor bei $E = 0$.

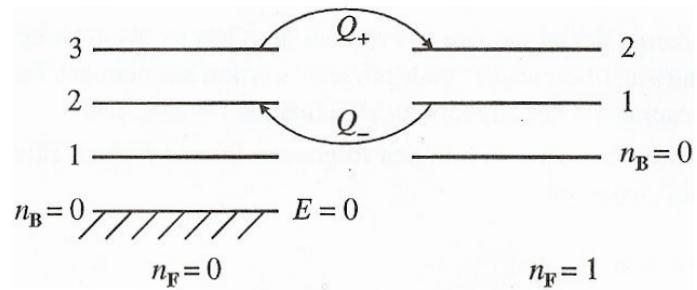


Abbildung 2.2: Unterste Energieniveaus des SUSY-Oszillators.²

Kapitel 3

Nichtlineare Supersymmetrie

Die im einfachsten Modell beschriebenen Operatoren sind linear. Die Energien sind allein durch die Teilchenzahlen n_B und n_F beschrieben, Wechselwirkungen zwischen den Sektoren also nicht erlaubt. Das bisherige Modell muss für den allgemeinen Fall daher noch erweitert werden.

3.1 Verallgemeinerte Operatoren

Die gewünschte Nichtlinearität der SUSY-Operatoren kann durch die Ersetzung der bosonischen Leiteroperatoren b^\pm durch allgemeine Operatoren $B^\pm = B^\pm(b^+, b^-)$ erreicht werden. Es gilt also:

$$Q_+ = B^- f^+ \quad \text{und} \quad Q_- = B^+ f^-. \quad (3.1)$$

Da der Hamiltonoperator hermitesch sein muss, sind die allgemeinen Operatoren B^\pm zueinander adjungiert: $(B^\pm)^\dagger = B^\mp$. Wie gehabt gilt $(Q_\pm)^\dagger = Q_\mp$ und $Q_\pm^2 = 0$. Der SUSY-Hamiltonoperator folgt als:

$$H_S = \{Q_+, Q_-\} = B^- B^+ f^+ f^- + B^+ B^- f^- f^+. \quad (3.2)$$

Aufgrund der allgemeineren Struktur der bosonischen Operatoren vertauscht der bosonische Teilchenzahloperator nun nicht mehr mit dem Hamiltonoperator. Dementsprechend ist n_B nun keine gute Quantenzahl mehr und charakterisiert die Energien zusammen mit n_F nicht mehr eindeutig. n_F hingegen bleibt eine gute Quantenzahl, eine Umbenennung der Zustände nach

$$|n_B n_F\rangle \Rightarrow |E n_F\rangle \quad (3.3)$$

bietet sich also an. Der Zustandsraum eines supersymmetrischen Systems zerfällt also wie gehabt in zwei Klassen, weshalb eine kanonische Darstellung der Operatoren und Zustände möglich ist.

3.2 Die Kanonische Darstellung

Die kanonische Darstellung ist bei Rechnungen häufig von Vorteil, da mit ihrer Hilfe die fermionischen Operatoren aus den Formulierungen entfernt werden können. So werden

einige Berechnungen in den nachfolgenden Abschnitten vereinfacht.

Die kanonischen Darstellung folgt, indem man die SUSY-Zustände als zweikomponentige Vektoren schreibt:

$$|E n_F\rangle = \begin{pmatrix} |E 0\rangle \\ |E 1\rangle \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} |Boson\rangle \\ |Fermion\rangle \end{pmatrix}. \quad (3.4)$$

Die SUSY-Operatoren entsprechen dann (2x2)-Matritzen. Für Q_1 erhält man beispielsweise:

$$Q_1 = B^- f^+ + B^+ f^- = \begin{pmatrix} 0 & B^+ \\ B^- & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.5)$$

Mit Hilfe von Gleichung (3.5) folgt direkt der SUSY-Hamiltonoperator in kanonischer Form:

$$H_S = \begin{pmatrix} B^+ B^- & 0 \\ 0 & B^- B^+ \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \{B^-, B^+\} \mathbb{1} - \frac{1}{2} [B^-, B^+] \sigma_3. \quad (3.6)$$

Hierbei ist $\mathbb{1}$ die Einheitsmatrix und σ_3 die dritte Paulimatrix. Der zweite Ausdruck kann an mancher Stelle noch nützlich sein.

Der hier an zwei Beispielen gezeigte Darstellungswechsel kann natürlich auch für die anderen SUSY-Operatoren erfolgen, für die weiteren Betrachtungen wird aber im Wesentlichen nur Gleichung (3.6) benötigt.

3.3 Das Superpotential

Eine elementare Größe der Supersymmetrie ist das Superpotential. Es liefert den SUSY-Hamiltonoperator, die Partnerpotentiale und ermöglicht die Konstruktion der supersymmetrischen Wellenfunktionen. Außerdem erlaubt es Aussagen über die Symmetriebrechung, also ob es einen Grundzustand bei $E = 0$ gibt und wenn ja, in welchem Sektor (bosonisch/fermionisch).

Die Einführung dieser Größe folgt aus einem Ansatz für die bosonischen Operatoren B^\pm . Diese können in Analogie zu den einfachen Leiteroperatoren

$$b^\pm = \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega}} (\sqrt{m}\omega\hat{q} \mp \frac{i\hat{p}}{\sqrt{m}}) \quad (3.7)$$

als „Auf-/Absteiger“ mit dem Superpotential $W(\hat{q})$

$$B^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}} (W(\hat{q}) \mp \frac{i\hat{p}}{\sqrt{m}}) \quad (3.8)$$

angesetzt werden. Nach Gleichung (3.6) folgt dann aus der Berechnung des (Anti-)Kommutators der SUSY-Hamiltonoperator:

$$H_S = \frac{1}{2} \left(\frac{\hat{p}^2}{m} + W^2 \right) \mathbb{1} - \frac{\hbar}{\sqrt{m}} \frac{dW}{dq} \frac{\sigma_3}{2}. \quad (3.9)$$

Dabei muss vorausgesetzt werden, dass sich das Superpotential als Potenzreihe schreiben lässt, was in der Regel aber der Fall ist. Gleichung (3.9) bildet bereits die Grundlage der supersymmetrischen Quantenmechanik.

In Abbildung 3.1 sind die bisherigen Ausführungen noch einmal zusammengefasst: Das einfachste Modell lieferte bereits die Form des SUSY-Hamiltonians als Antikommutator von Q_{\pm} , welcher sich im allgemeineren Ansatz mit den bosonischen Operatoren B^{\pm} in kanonischer Darstellung als Diagonalmatrix schreiben lässt. Nach der Einführung des Superpotentials $W(\hat{q})$ folgt dann direkt der supersymmetrische Hamiltonoperator der Quantenmechanik.

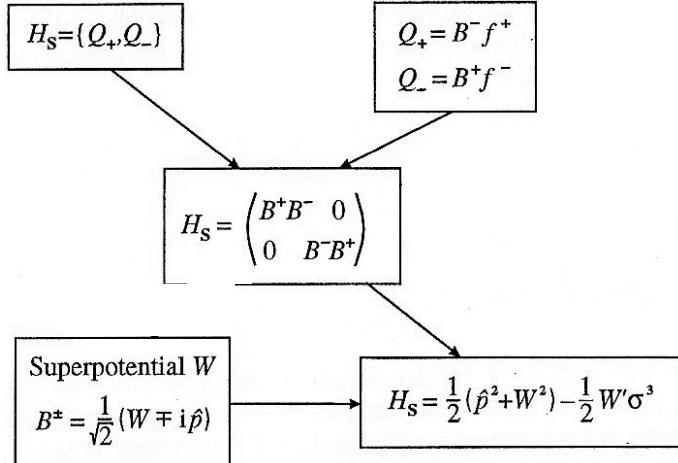


Abbildung 3.1: Zur Struktur des SUSY-Hamiltonoperators mit $\hbar = m = 1$.²

3.4 Das Eigenwertspektrum

Nur mit Hilfe der Eigenschaften der Operatoren $Q_{1/2}$ lassen sich bereits Aussagen über das Eigenwertspektrum eines supersymmetrischen Systems machen. So ist der Hamiltonoperator durch das Quadrat eines hermiteschen Operators gegeben. Hermitesche Operatoren haben reelle Eigenwerte, daher muss die Energie größer oder gleich Null sein:

$$E \geq 0. \quad (3.10)$$

Außerdem müssen Q_1 und H_S die selben Eigenfunktionen haben und Q_1 den Eigenwert $\pm\sqrt{E}$. Dieser sei hier o.B.d.A. positiv:

$$Q_1 |A\rangle = \sqrt{E} |A\rangle. \quad (3.11)$$

Da Q_1 und Q_2 nicht vertauschen, besitzen sie nicht die selben Eigenfunktionen. Es gilt also:

$$Q_1 |B\rangle = Q_1 Q_2 |A\rangle = -Q_2 Q_1 |A\rangle = -\sqrt{E} |B\rangle. \quad (3.12)$$

Da $H = Q_{1/2}^2$ ist, müssen aber auch die Zustände $|B\rangle$ Eigenfunktionen zu H_S sein:

$$H_S |A\rangle = E |A\rangle \quad \text{und} \quad H_S |B\rangle = E |B\rangle. \quad (3.13)$$

Alle Zustände zu $E > 0$ sind also zweifach entartet. Zu $E = 0$ funktioniert dieser Beweis nicht, da wegen $Q_1 |A\rangle = 0 = Q_1 |B\rangle$ auch $|A\rangle = |B\rangle = 0$ folgen kann, in diesem Fall also kein Grundzustand existiert.

Zur Betrachtung des Grundzustandes bei $E = 0$ verwende man den ersten Ausdruck

aus Gleichung (3.6). Da die Matrix Diagonalgestalt hat, entkoppeln die DGLs in der Schrödinger-Gleichung und es gilt:

$$H_1 |00\rangle = B^+ B^- |00\rangle = 0 \rightarrow B^- |00\rangle = 0 \quad (3.14)$$

$$H_2 |01\rangle = B^- B^+ |01\rangle = 0 \rightarrow B^+ |01\rangle = 0. \quad (3.15)$$

Der Beweis der beiden Folgerungen kann elementar nachgerechnet werden. In der Ortsdarstellung erhält man so:

$$\left(\frac{\hbar}{\sqrt{m}} \frac{d}{dx} + W \right) \psi_0^{(1)} = 0 \quad \text{und} \quad \left(\frac{\hbar}{\sqrt{m}} \frac{d}{dx} - W \right) \psi_0^{(2)} = 0. \quad (3.16)$$

Eine Lösung ist die Exponentialfunktion

$$\psi_0^{(1/2)} = C e^{\mp \frac{\hbar}{\sqrt{m}} \int_0^x W(x') dx'}, \quad (3.17)$$

die nur normierbar ist, wenn der Grundzustand nicht entartet ist, da sich die folgenden Bedingungen ausschließen:

$$\psi_0^{(1)} \text{ ist GZ: } \int_{-\infty}^0 W(x') dx' = -\infty \text{ und } \int_0^{\infty} W(x') dx' = +\infty \quad (3.18)$$

$$\psi_0^{(2)} \text{ ist GZ: } \int_{-\infty}^0 W(x') dx' = +\infty \text{ und } \int_0^{\infty} W(x') dx' = -\infty. \quad (3.19)$$

Das Energiespektrum hat also die in Abb. 3.2 dargestellte Form. Es gibt einen Grundzustand im fermionischen oder bosonischen Sektor oder keinen Grundzustand. Im ersten Fall spricht man von einer exakten, im zweiten Fall von einer gebrochenen Symmetrie. Die Zustände zu $E > 0$ sind zweifach entartet, wie bereits beim SUSY-Oszillatator gesehen.

SUSY exakt	gebrochen
$E = 0$	

Abbildung 3.2: Energiespektrum eines supersymmetrischen Systems.²

Wie bereits erwähnt, bestimmt sich die Symmetriebrechung des Systems aus dem Verhalten des Superpotentials. Hat es verschiedene Vorzeichen für $\pm\infty$, ist die Symmetrie exakt, für gleiche Vorzeichen gebrochen.

Im exakten Fall kann der Grundzustand durch eine einfache Multiplikation mit -1 zwischen den Sektoren verschoben werden. Der Einfachheit halber kann daher der Grundzustand im Folgenden immer in den bosonischen Bereich gelegt werden.

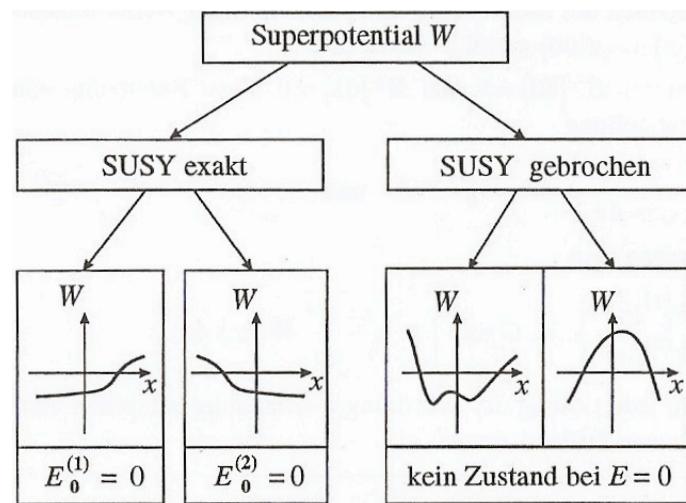


Abbildung 3.3: Superpotential und Symmetriebrechung.²

Kapitel 4

Supersymmetrische Quantenmechanik

Die Grundlage der supersymmetrischen Quantenmechanik wurde im vorherigen Abschnitt bereits hergeleitet. Dabei spricht man von Quantenmechanik, wenn die hier zeitunabhängige Schrödinger-Gleichung

$$H\psi = E\psi \quad \text{mit} \quad H = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\hat{q}) \quad (4.1)$$

verwendet wird. Wie gehabt gilt außerdem

$$H_S = \frac{1}{2} \left(\frac{\hat{p}^2}{m} + W^2 \right) \mathbb{1} - \frac{\hbar}{\sqrt{m}} \frac{dW}{dx} \frac{\sigma_3}{2} := \begin{pmatrix} H_1 & 0 \\ 0 & H_2 \end{pmatrix}, \quad (4.2)$$

womit man zu den Einzelhamiltonians mit den Partnerpotentialen $V_{1/2}$ gelangt:

$$\begin{aligned} H_1 &= B^+ B^- = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V_1(x) \quad \text{mit} \quad V_1(x) = \frac{1}{2} \left(W^2 - \frac{\hbar}{\sqrt{m}} W' \right) \\ H_2 &= B^- B^+ = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V_2(x) \quad \text{mit} \quad V_2(x) = \frac{1}{2} \left(W^2 + \frac{\hbar}{\sqrt{m}} W' \right). \end{aligned} \quad (4.3)$$

Nach Gleichung (4.1) folgt dann je eine Schrödinger-Gleichung für den bosonischen und den fermionischen Sektor:

$$H_1 \psi_n^{(1)} = E_n^{(1)} \psi_n^{(1)} \quad (\text{Boson}) \quad \text{und} \quad H_2 \psi_n^{(2)} = E_n^{(2)} \psi_n^{(2)} \quad (\text{Fermion}). \quad (4.4)$$

Mit diesen entkoppelten Gleichungen können bereits einige nützliche Eigenschaften des Eigenwertspektrums und der Eigenzustände supersymmetrischer Systeme in der Quantenmechanik hergeleitet werden.

4.1 Eigenwerte und Eigenzustände

Einsetzen der Gleichungen (4.3) in (4.4) liefert folgende Relationen:

$$H_2(B^- \psi_n^{(1)}) = B^- B^+ B^- \psi_n^{(1)} = E_n^{(1)} (B^- \psi_n^{(1)}) \quad (4.5)$$

$$H_1(B^+ \psi_n^{(2)}) = B^+ B^- B^+ \psi_n^{(2)} = E_n^{(2)} (B^+ \psi_n^{(2)}) \quad (4.6)$$

Dem zufolge ist $E_n^{(2)}$ sowohl Eigenwert zu H_2 wie auch zu H_1 . Das selbe gilt für $E_n^{(1)}$, sodass H_1 und H_2 bis auf $E = 0$ bei exakter Symmetrie die selben Eigenwerte besitzen:

$$E_0^{(1)} = 0 \quad \text{und} \quad E_n^{(2)} = E_{n+1}^{(1)} \quad \text{bei exakter Symmetrie} \quad (4.7)$$

$$E_n^{(2)} = E_n^{(1)} \quad \text{bei gebrochener Symmetrie.} \quad (4.8)$$

Außerdem ist zu erkennen, dass $B^- \psi_n^{(1)}$ Eigenzustand zu H_2 bzw. $B^+ \psi_n^{(2)}$ Eigenzustand zu H_1 ist. B^\pm überführt also die Eigenzustände ineinander:

$$\psi_n^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{E_{n+1}^{(1)}}} B^- \psi_{n+1}^{(1)} \quad \text{und} \quad \psi_{n+1}^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{E_n^{(2)}}} B^+ \psi_n^{(2)} \quad \text{bei exakter Symmetrie} \quad (4.9)$$

$$\psi_n^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{E_n^{(1)}}} B^- \psi_n^{(1)} \quad \text{und} \quad \psi_n^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{E_n^{(2)}}} B^+ \psi_n^{(2)} \quad \text{bei gebrochener Symmetrie.} \quad (4.10)$$

Bei bekanntem Superpotential folgen also aus den Eigenzuständen des einen Partnerpotentials die des anderen. Kennt man nun also eines der Partnerpotentiale mitsamt Eigenzuständen und -energien, kann man wie oben hergeleitet den Hamiltonoperator sowie die zugehörigen Energien und Zustände berechnen.

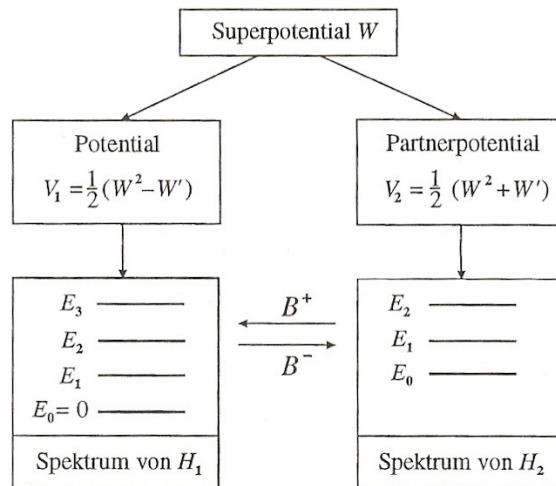


Abbildung 4.1: Zur Berechnung der Partnerpotentiale und des Energiespektrums.²

Dies ist auch das übliche Vorgehen, um ein bekanntes quantenmechanisches System zu „supersymmetrisieren“: Man fasst das bekannte Potential als erstes Partnerpotential auf und geht dann wie beschrieben vor. Dazu wird allerdings noch das Superpotential $W(\hat{q})$ benötigt. Wie man dieses aus dem Grundzustand eines Systems berechnet ist Gegenstand des nächsten Abschnitts.

4.2 Vom Grundzustand zum Superpotential

Sei also ein quantenmechanisches System gegeben, dessen Supersymmetrie als exakt vorausgesetzt werden soll (d.h. die Grundzustandsenergie liegt bei $E = 0$). Die Schrödinger-Gleichung

lautet für diesen Fall

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \psi_0'' + \frac{1}{2}(W^2 - \frac{\hbar}{\sqrt{m}}W')\psi_0 = 0, \quad (4.11)$$

was sich umgestellt auch als

$$\frac{\psi_0''}{\psi_0} = (\frac{\psi_0'}{\psi_0})^2 + (\frac{\psi_0'}{\psi_0})' = (-\frac{\sqrt{m}}{\hbar} W)^2 + (-\frac{\sqrt{m}}{\hbar} W)' \quad (4.12)$$

formulieren lässt. Ein Vergleich des zweiten und dritten Ausdrucks liefert eine Gleichung für das Superpotential:

$$W = -\frac{\hbar}{\sqrt{m}} \frac{\psi_0'}{\psi_0} = -\frac{\hbar}{\sqrt{m}} \frac{d}{dx} \ln \psi_0. \quad (4.13)$$

So lässt sich aus der Grundzustandswellenfunktion ψ_0 das Superpotential berechnen, was einem mit den Gleichungen (4.2) und (4.3) den SUSY-Hamiltonian und die Superpotentiale liefert. Sind zudem die Eigenzustände und -energien des Ausgangssystems bekannt, folgen mit Gleichung (4.7)-(4.10) auch die des Partnersystems. Der Zusammenhang zwischen ψ_0 , W und V_1 ist in Abb. 4.2 dargestellt.

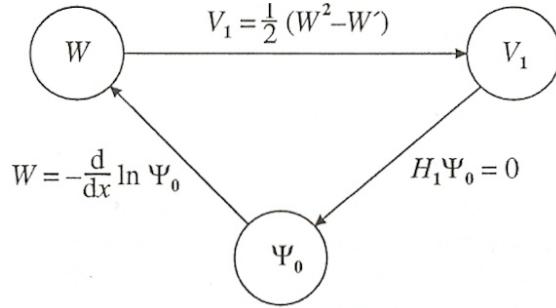


Abbildung 4.2: Zusammenhang zwischen ψ_0 , W und V_1 .²

Das allgemeine Vorgehen zur Berechnung des Partnersystems und damit zur „Supersymmetrisierung“ ist also wie folgt: Man subtrahiere zunächst die Grundzustandsenergie des Ausgangssystems von dessen Hamiltonoperator und erhält den des ersten Partnersystems:

$$H_1 = H - E_0. \quad (4.14)$$

Anschließend wird nach Gleichung (4.13) aus der Grundzustandswellenfunktion des bekannten Systems das Superpotential berechnet, woraus direkt alle anderen relevanten Größen folgen.

Dieses Vorgehen soll zu guter Letzt an zwei Beispielen verdeutlicht werden.

4.3 Beispiel: Der supersymmetrische Oszillatator II

Dieses Beispiel wurde zwar zu Beginn bereits erläutert, soll hier aber nochmals kurz beschrieben werden. Ausgehend vom eindimensionalen harmonischen Oszillatator

$$H = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 \quad (4.15)$$

mit der Grundzustandswellenfunktion

$$\psi_0 = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar} \right)^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{m\omega x^2}{2\hbar}} \quad \text{und} \quad E_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega \quad (4.16)$$

folgt direkt das Superpotential

$$W = \sqrt{m\omega}x \quad (4.17)$$

und damit die Partnerpotentiale

$$V_1 = \frac{1}{2}(m\omega^2 x^2 - \hbar\omega) \quad \text{und} \quad V_2 = \frac{1}{2}(m\omega^2 x^2 + \hbar\omega). \quad (4.18)$$

Eine ausführlichere Berechnung auch der Partnerzustände und Energien folgt im zweiten Beispiel, dem Kastenpotential.

4.4 Beispiel 2: Das Kastenpotential

Der Hamiltonoperator des Kastenpotentials mit unendlich hohen Wänden lautet

$$H = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(x) \quad \text{mit} \quad V(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } 0 \leq x \leq L \\ \infty & \text{sonst.} \end{cases} \quad (4.19)$$

Dieses Problem lässt sich vollständig analytisch lösen, die Eigenzustände und -energien lauten:

$$\psi_n = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin \frac{(n+1)\pi x}{L} \quad \text{für } 0 \leq x \leq L \quad (4.20)$$

$$E_n = \frac{\hbar^2\pi^2}{2mL^2} (n+1)^2. \quad (4.21)$$

Das Superpotential $W = \frac{\hbar\pi}{\sqrt{m}L} \cot \frac{\pi x}{L}$ berechnet sich wie gewohnt aus der Grundzustandswellenfunktion, womit man direkt das Partnerpotential

$$V_2 = \frac{\hbar^2\pi^2}{2mL^2} \left(\frac{2}{\sin^2(\pi x/L)} - 1 \right) \quad (4.22)$$

erhält. Die Eigenzustände dieses Partnerpotentials können mit Gleichung (4.9) ermittelt

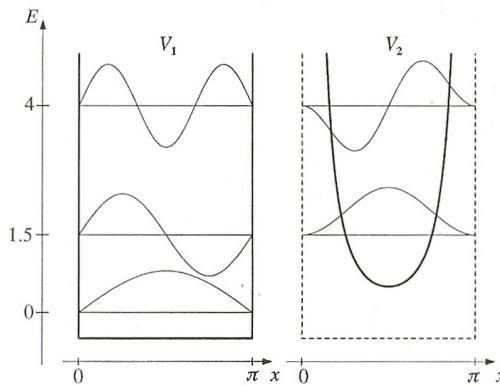


Abbildung 4.3: Das Kastenpotential und sein SUSY-Partner.²

werden. Der unterste Partnerzustand lautet beispielsweise:

$$\psi_0^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{E_1^{(1)}}} B^- \psi_1^{(1)} = -\sqrt{\frac{8}{3L}} \sin(2\pi x/L). \quad (4.23)$$

Die beiden Partnerpotentiale mit den untersten Eigenzuständen und -werten sind in Abb. 4.3 grafisch dargestellt.

¹<http://www.ecap.physik.uni-erlangen.de/~katz/ws03/atp/talks/hm/HM.pdf>

²Harald Kalka und Gerhard Soff, „Supersymmetrie“, Teubner, 1997