

Zusammenfassung des Vortrags
SU(3) und das Quarkmodell
im Seminar zur
Theorie der Teilchen und Felder

Artur Sperling

01.12.2010

Inhaltsverzeichnis

1	Mathematik der $SU(3)$-Gruppe	2
1.1	Die Lie-Algebra der $SU(3)$	2
1.2	Operatordiagramm der $SU(3)$	3
2	$SU(3)$ und die Quarks	5
2.1	Darstellung der $SU(3)$	5
2.2	Mesonen	6
2.3	Baryonen	7
3	Literatur	8

1 Mathematik der SU(3)-Gruppe

Wir betrachten einen dreidimensionalen Zustandsraum mit den orthonormalen Basiszuständen

$$|1\rangle, |2\rangle, |3\rangle \text{ mit } \langle i|j\rangle = \delta_{ij} \quad (1 \leq i, j \leq 3). \quad (1)$$

Die SU(3)-Gruppe ist die Gruppe der unitären Transformation $\mathbf{U}$ mit Determinante 1 in unserem dreidimensionalen Zustandsraum. In dieser Basis haben wir

$$\mathbf{U}|i\rangle = |j\rangle \mathbf{U}_{ij}, \quad (2)$$

$$\mathbf{U}^\dagger \mathbf{U} = 1, \quad (3)$$

$$\det \mathbf{U} = 1 \quad (4)$$

Wie bei Drehungen im Isospin-Raum ist es nützlich die infinitesimale Transformation zu betrachten:

$$\mathbf{U} = 1 + i\delta\varphi \mathbf{H}, \quad (5)$$

wobei $\delta\varphi$ reell und von 1. Ordnung klein und $\mathbf{H}$ eine Matrix ist. Einsetzen in Gleichung (3) und (4) führt zu:

$$(1 + i\delta\varphi \mathbf{H})(1 - i\delta\varphi \mathbf{H}^\dagger) = 1 \quad (6)$$

$$\det(1 + i\delta\varphi \mathbf{H}) = 1 + 1\delta\varphi(\text{Sp } \mathbf{H}) = 1 \quad (7)$$

Daraus folgen die Bedingungen für $\mathbf{H}$:

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}^\dagger, \quad (8)$$

$$\text{Sp } \mathbf{H} = 0. \quad (9)$$

Man sieht, $\mathbf{H}$ ist eine hermitesche Matrix mit verschwindender Spur. Umgekehrt liefert jede solche Matrix $\mathbf{H}$ eine infinitesimale Transformation aus SU(3).

Die Anzahl der linear unabhängigen hermiteschen 3×3 -Matrizen ist 9, da wir in der Hauptdiagonalen jeweils eine reelle Zahl, oberhalb der Diagonale eine komplexe Zahl vorgeben können.

Die Spurbedingung aus (9) reduziert die Anzahl der unabhängigen Matrizen $\mathbf{H}$ auf 8. Für diese spezielle unitäre Gruppe in drei Dimensionen bilden die Gell-Mann- λ -Matrizen (Gell-Mann 1964) eine geeignete Basis:

$$\lambda_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \lambda_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \lambda_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \lambda_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\lambda_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \lambda_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}; \lambda_8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Diese Matrizen sind die Verallgemeinerung der Isospin-Matrizen $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ auf den Fall der SU(3). Die Normierung ist so gewählt, dass

$$\text{Sp}(\lambda_a \lambda_b) = 2\delta_{ab} \quad (10)$$

erfüllt sein muss. $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ kommen aus der SU(2), da sie eine Untergruppe der SU(3) ist. Sie werden durch Erweiterung auf 3-D konstruiert. λ_4 und λ_6 ergeben sich durch Verschiebung der 1 Elemente der Paulimatrix sukzessiv nach unten, ebenso λ_5 und λ_7 . Der Faktor $\frac{1}{\sqrt{3}}$ bei λ_8 ist notwendig, damit die Normierung erfüllt wird.

1.1 Die Lie-Algebra der SU(3)

Mit dieser Darstellung der Generatoren λ_i , ist es nun möglich die Kommutatoren der λ_i und damit die Lie-Algebra der SU(3) zu berechnen. Man findet:

$$[\lambda_i, \lambda_j] = 2if_{ijk}\lambda_k \quad (11)$$

f_{ijk} ist die gegen Austausch vollständig antisymmetrische Strukturkonstante. Gleichung (11) bestätigt, die Lie-Algebra der SU(3) ist geschlossen, für sie gilt:

$$f_{123} = 1 \quad (12)$$

$$f_{147} = f_{165} = f_{246} = f_{237} = f_{345} = f_{376} = \frac{1}{2} \quad (13)$$

$$f_{458} = f_{678} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad (14)$$

Man definiert überlicherweise

$$F_i = \frac{1}{2} \lambda_i \quad (15)$$

$$\Rightarrow [F_i, F_j] = i f_{ijk} F_k \quad (16)$$

Damit ist die Analogie zwischen $\lambda_i \leftrightarrow F_i$ bei SU(3) und $\sigma_i \leftrightarrow S_i$ bei SU(2) hergestellt.

Ähnlich wie bei der Drehimpulsalgebra führt man die F-Operatoren in *sphärischer Darstellung* ein:

$$T_{\pm} = F_1 \pm i F_2 \quad (17)$$

$$T_3 = F_3 \quad (18)$$

$$V_{\pm} = F_3 \pm i F_5 \quad (19)$$

$$Y = \frac{2}{\sqrt{3}} F_8 \quad (20)$$

$$U_{\pm} = F_6 \pm i F_7 \quad (21)$$

Die Definition für $T_{\pm}$, $V_{\pm}$, $U_{\pm}$ und T_3 liegen aufgrund des Aufbaus der F-Operatoren aus den Pauli-Matrizen nahe.

$$[T_3, T_{\pm}] = \pm T_{\pm} \quad (22)$$

$$[T_+, T_-] = 2T_3 \quad (23)$$

$$[T_3, V_{\pm}] = \pm \frac{1}{2} V_{\pm} \quad (24)$$

$$[V_+, V_-] = \frac{1}{2} (2Y + 2T_3) \quad (25)$$

$$[T_3, U_{\pm}] = \mp \frac{1}{2} U_{\pm} \quad (26)$$

$$[U_+, U_-] = \frac{1}{2} (3Y - 2T_3) \quad (27)$$

sowie

$$[T_{\pm}, V_{\pm}] = [T_{\pm}, U_{\mp}] = [T_{\pm}, Y] = 0 \quad (28)$$

$$[T_{\pm}, V_{\mp}] = [U_{\pm}, V_{\mp}] = [T_3, Y] = 0 \quad (29)$$

$$[T_{\pm}, V_{\mp}] = \mp U_{\mp} \quad (30)$$

$$[T_{\pm}, U_{\pm}] = \pm V_{\pm} \quad (31)$$

$$[Y, V_{\pm}] = \pm V_{\pm} \quad (32)$$

$$[Y, U_{\pm}] = \mp U_{\pm} \quad (33)$$

Von den Generatoren der SU(3)-Lie-Algebra kommutieren maximal 2. Die SU(3) hat daher den Rang 2.

1.2 Operatordiagramm der SU(3)

Wegen der Vertauschungsrelation $[T_3, Y] = 0$ kann man die Multiplettzustände durch die Eigenwerte

$$\hat{T}_3 |T_3 Y\rangle = T_3 |T_3 Y\rangle \quad (34)$$

$$\hat{Y} |T_3 Y\rangle = Y |T_3 Y\rangle \quad (35)$$

beschreiben. Ebenso wie im Fall der SU(2) zeigen die Vertauschungsrelationen, dass die Operatoren $T_\pm$, $V_\pm$, $U_\pm$ sowohl für T_3 als auch für Y als Aufsteige- bzw. Absteige-Operator sind. Beispiel $V_\pm$:

$$\text{Mit } [\hat{T}_3, \hat{V}_\pm] = \pm \frac{1}{2} \hat{V}_\pm : \quad (36)$$

$$(\hat{T}_3 \hat{V}_\pm - \hat{V}_\pm \hat{T}_3) |T_3 Y\rangle = \pm \frac{1}{2} \hat{V}_\pm |T_3 Y\rangle \quad (37)$$

$$\hat{T}_3 \hat{V}_\pm |T_3 Y\rangle - \hat{V}_\pm \hat{T}_3 |T_3 Y\rangle = \frac{1}{2} \hat{V}_\pm |T_3 Y\rangle \quad (38)$$

$$T_3 (\hat{V}_\pm |T_3 Y\rangle) = \left(T_3 \pm \frac{1}{2}\right) (\hat{V}_\pm |T_3 Y\rangle) \quad (39)$$

$\hat{V}_\pm$ bewirkt eine Erhöhung bzw. Erniedrigung der Quantenzahl T_3 um $\frac{1}{2}$.

Analog findet man:

$\hat{U}_\pm$ erniedrigt bzw. erhöht die Quantenzahl T_3 um $\frac{1}{2}$.

$\hat{T}_\pm$ erhöht bzw. erniedrigt die Quantenzahl T_3 um 1.

$\hat{V}_\pm$ erhöht bzw. erniedrigt die Quantenzahl Y um 1.

$\hat{U}_\pm$ erhöht bzw. erniedrigt die Quantenzahl Y um 1.

$\hat{T}_\pm$ verändert die Quantenzahl Y nicht.

Da die Zustände zwei Quantenzahlen aufweisen, kann man ein zweidimensionales Gitter auftragen:

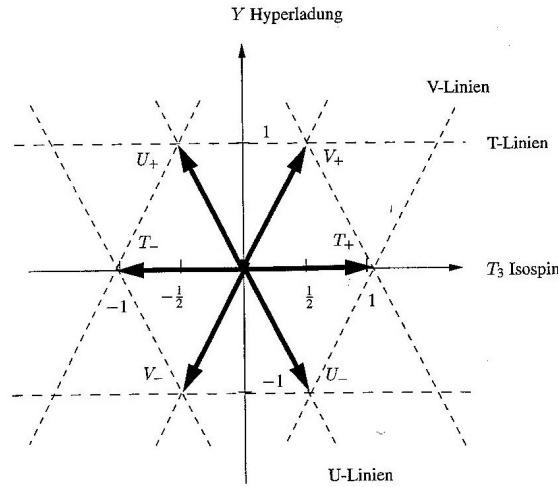


Abbildung 1: SU(3)-Operator-Diagramm [Wagner]

Dabei werden die Einheiten so gewählt, dass die Linien, die den Leiteroperatoren entsprechen, miteinander einen Winkel einschließen, die ein Vielfaches von 60° sind. $\implies$ Die Darstellung hat eine 120° -Symmetrie, da die T-, V- und U-Algebren gleichsymmetrische und damit gleichberechtigte Unteralgebren der SU(3) sind. Hieraus folgt auch, dass der Nullpunkt $Y = 0$, T_3 auch Mittelpunkt eines jeden SU(3)-Multipletts ist. Der Rand der Darstellung ist konvex und jeder Gitterpunkt auf der Randlinie ist einfach besetzt. Um den Rand des Zustands zu bestimmen, betrachtet man den Zustand mit dem höchsten Wert von T_3 , so dass gilt:

$$T_3 \Psi_{max} = V_+ \Psi_{max} = U_- \Psi_{max} = 0 \quad (40)$$

Nun wendet man V_- auf Ψ_{max} an, bis

$$(\hat{V}_-)^{p+1} \Psi_{max} = 0 \quad (41)$$

Dann wendet man $\hat{T}_-$ auf $(\hat{V}_-)^p$ an, bis

$$(\hat{T}_-)^{q+1} (\hat{V}_-)^p \Psi_{max} = 0 \quad (42)$$

Ab hier ist die weitere Darstellung durch die 120° -Symmetrie vorherbestimmt und man kann sie durch die Angabe (p,q) eindeutig charakterisieren.

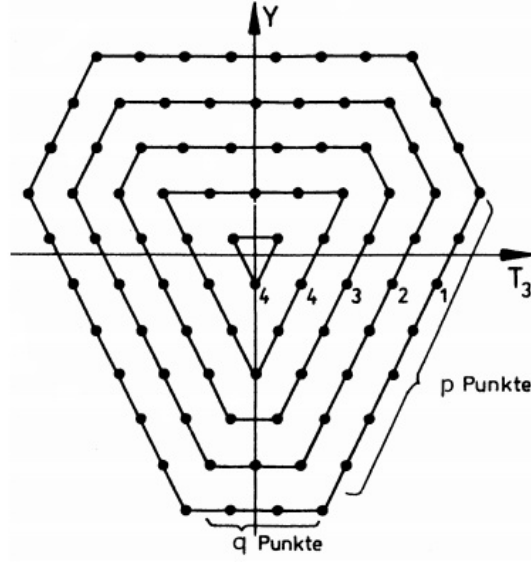


Abbildung 2: (7,3)-Darstellung [GM]

2 SU(3) und die Quarks

Die fundamentale Annahme des Quarkmodells für die Hadronen ist, Mesonen als Quark-Antiquark-Bindungszustände, Baryonen als 3-Quark-Zustände aufzufassen:

$$\text{Mesonen} \sim q\bar{q} \quad (43)$$

$$\text{Baryonen} \sim qqq \quad (44)$$

Die beobachteten Hadronen sind die Eigenzustände des Hamilton-Operators der starken Wechselwirkung. Ziel ist es, eine Aussage über das Hadronen-Spektrum zu machen ohne eine Schrödingergleichung explizit zu lösen. Dafür betrachtet man eine idealisierte Welt mit den 3 Quarks up, down und strange mit folgenden Annahmen:

- Flavor-Universalität der starken Kräfte
Die starken Kräfte wirken auf alle Quarks identisch
- Gleichheit der Massen up-, down- und strange-Quarks
Diese Forderung ist nicht realistisch. Obwohl die Massen des up- und down-Quarks ähnlich sind (3-5 MeV), ist die Masse des strange-Quarks wesentlich höher (104 MeV).

Damit ist der Hamilton-Operator der starken Wechselwirkung invariant unter SU(3)-Transformation der Quarks.

2.1 Darstellung der SU(3)

Wir möchten zunächst die kleinsten Darstellungen der F-Spin-Algebra konstruieren. Man beginnt mit der

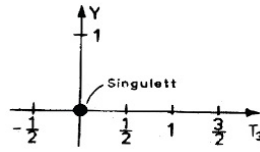


Abbildung 3: Singulett-Darstellung [GM]

- kleinsten trivialen Darstellung der SU(3):
Singulett: (0,0) mit $Y = 0$, $T_3 = 0$
Damit ist aber kein Aufbau höherer Multipletts möglich.

Deshalb sucht man sich die

- kleinste, nichttriviale Darstellung:
Aus der SU(2) war es das Duplett: $Y = \frac{1}{2}$, $T_3 = \pm \frac{1}{2}$
Es treten die T-, U- und V-Spin Algebren vollständig symmetrisch in der F-Spin-Algebra auf.

In diesem Zusammenhang wird Y als die Hyperladung und T_3 als der Isospin der Elementarteilchen interpretiert. Daraus folgt auch die Ladung der Teilchen mit

$$Q = \frac{1}{2}Y + T_3 \quad (45)$$

Die vollständigen Quantenzahlen der Quarks werden in der Tabelle 1 angegeben.

	u	d	s
T_3	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
Y	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{2}$
S	0	0	1
Q	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$

Tabelle 1: Quantenzahlen der Quarks

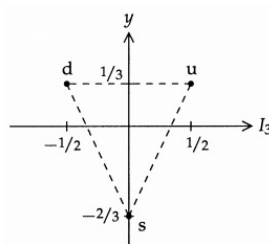


Abbildung 4: 3-Darstellung der Quarks [Weinheimer]

Abbildung (4) zeigt die Darstellung, nach welcher die Quarks transformieren. Antiquarks weisen jeweils ein anderes Vorzeichen der Quantenzahlen als die Quarks auf. Mit dieser elementaren Darstellung ist man nun in der Lage höhere Multipletts zu konstruieren.

2.2 Mesonen

Da es sich bei Mesonen um Quark-Antiquark-Zustände handelt, muss das Produkt der irreduziblen Darstellungen 3 und 3^* ausreduziert werden

$$3 \otimes 3^* \quad (46)$$

Die Ausreduktion erfolgt grafisch wie in Abbildung 5 dargestellt. Wir haben zwei additive Quantenzahlen Y und T_3 . Die drei besetzten 3-Darstellungen werden jeweils in den Mittelpunkt einer 3^* -Darstellung gesetzt. Daraus erhält man eine Sechseckstruktur mit einfach besetzten Stellen und drei Stellen im Ursprung. Wir erhalten ein Oktett und ein Singulett:

$$3 \otimes 3^* = 8 \oplus 1 \quad (47)$$

Mesonen treten als Singulett oder Oktett auf.

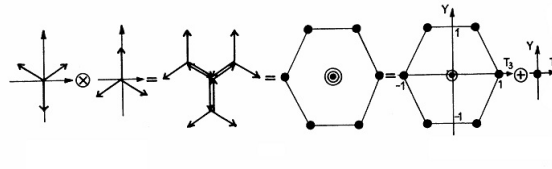


Abbildung 5: Reduktion von $3 \otimes 3^*$ [GM]

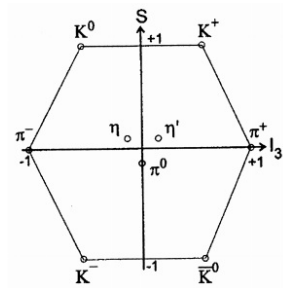


Abbildung 6: Mesonenoktett und -singulett [Weinheimer]

2.3 Baryonen

Für die Baryonen mit 3-Quark Zuständen muss das Produkt

$$3 \otimes 3 \quad (48)$$

ausreduziert werden. Diese erfolgt ebenfalls grafisch und man betrachtet zunächst das Produkt von zwei 3-Darstellungen. Nach Abbildung 7 erhält man eine 6- und eine 3^* -Darstellung:

$$(3 \otimes 3) \otimes 3 = (6 \oplus 3^*) \otimes 3 \quad (49)$$

Es gilt die Distributivität und das Produkt aus 3- und 3^* -Darstellung ist von den Mesonen bekannt. Eine Ausreduktion von der 6- und 3-Darstellung in Abbildung 8 liefert:

$$3 \otimes 3 \otimes 3 = 1 \oplus 8 \oplus 8 \oplus 10. \quad (50)$$

Baryonen treten als Singulett, Oktett oder Dekuplett auf.

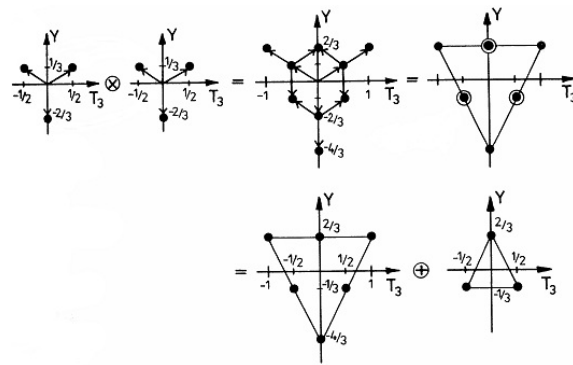
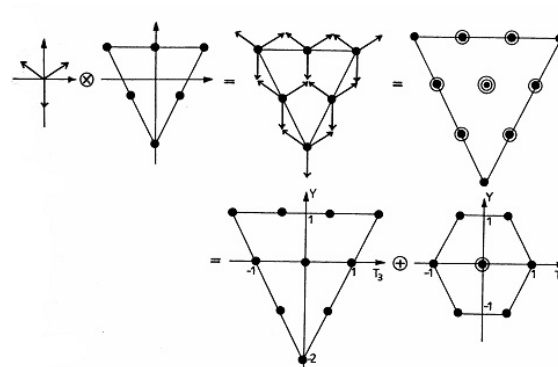
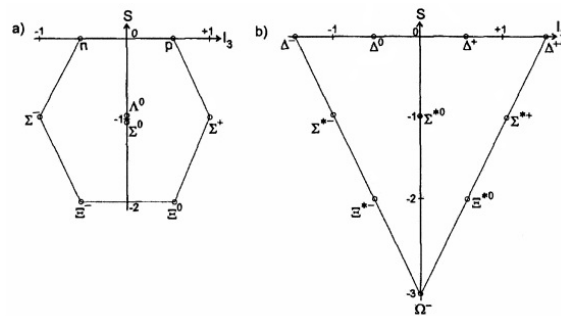
Abbildung 7: Reduktion von $3 \otimes 3$ [GM]Abbildung 8: Reduktion von $3 \otimes 8$ [GM]

Abbildung 9: Baryonenoktett und -dekuplett [Weinheimer]

3 Literatur

- Stephan Gasiorowicz: Elementarteilchenphysik, B.I.-Wissenschaftsverlag 1975
- Walter Greiner, Berndt Müller: Theoretische Physik Band 5: Quantenmechanik II: Symmetrien, Verlag Harri Deutsch, 1985
- Otto Nachtmann: Elementarteilchenphysik: Phänomene und Konzepte, Vieweg 1986 [GM]
- Max Wagner: Gruppentheoretische Methoden in der Physik, Vieweg 1998 [Wagner]
- Christian Weinheimer: Skript zur Vorlesung Kern- und Teilchenphysik, 2006 [Weinheimer]