

**Die Renormierungsgruppe**  
Seminar Teilchen und Felder

Kolja Kleineberg

20/01/2010

## Zusammenfassung

Die *Renormierungsgruppe* ist ein alternatives Verfahren zur Lösung von Probleme deren Dynamik sich auf sehr verschiedenen Skalen abspielt und ermöglicht (näherungsweise) die Lösung vieler Systeme wie z.B. dem 3 dimensionalen Ising Modell.

Im Gegensatz zu z.B. Onsagers Lösung für das zweidimensionale Ising Modell steht hier nicht mehr die explizite Lösung eines gegebenen Hamiltonoperators für ein spezielles System im Vordergrund, sondern man geht zu einer Betrachtung des Systems im Raum aller Hamiltonoperatoren über. Die sogenannte *Renormierungstransformation* wirkt in diesem Raum und bildet einen Operator  $H$  ab auf  $H' = \mathcal{R}_L H$ , wobei im neuen System die Anzahl der Freiheitsgrade um den Faktor  $L^d$  ( $d$  entspricht der Dimension des Systems) reduziert sind. Gesucht ist dann eine Darstellung des Hamiltonoperators, die forminvariant bezüglich der Renormierungstransformation ist, sodass man den Effekt der Transformation in den Parametern (z.B. Kopplungskonstanten) des Operators absorbieren kann.

Sukzessive Anwendung der Transformation führt bei forminvarianter Darstellung des Hamiltonoperators zu rekursiven Gleichungen, die sich als Trajektorien im Parameterraum darstellen lassen (*Hamilton'scher Fluss*). Fixpunkte dieser Trajektorien werden mit kritischen Punkten assoziiert, da dort offensichtlich der Hamiltonoperator skaleninvariant ist, d.h.  $H^* = \mathcal{R}_L H^*$ , sodass die Korrelationslänge  $\xi$  unendlich groß ist, was genau am kritischen Punkten der Fall ist (bekannt aus vorherigem Vortrag über Skaleninvarianz).

*Die Lösung eines Systems wird daher auf das Finden von Fixpunkten im Hamiltonraum reduziert. Aus einer linearen Näherung in Fixpunktnähe lassen sich die kritischen Exponenten bestimmen.*

# Inhaltsverzeichnis

<b>1 Formalismus der Renormierungsgruppe</b>	<b>1</b>
1.1 Effektiver Hamiltonoperator . . . . .	1
1.2 Renormierungstransformation und -gruppe . . . . .	1
<b>2 Hamilton'scher Fluss</b>	<b>1</b>
2.1 Sukzessive Anwendung der Transformation . . . . .	1
2.2 Fixpunkte und kritische Fläche . . . . .	2
<b>3 Linearisierung und Operatorenklassifizierung</b>	<b>3</b>
3.1 Entwicklung in Fixpunktnähe . . . . .	3
3.2 Relevante, irrelevante und marginale Operatoren . . . . .	3
<b>4 Beispiel: Ising 2-d</b>	<b>4</b>
4.1 Hamiltonoperator und Spinblöcke . . . . .	4
4.2 Blockstruktur und Renormierung . . . . .	5
4.3 Zustandssumme und Notwendigkeit der Spinreskalierung . . . . .	5
4.4 Berechnung des renormierten Hamiltonoperators . . . . .	6
4.5 Rekursive Gleichungen und Fixpunkte . . . . .	6
4.6 Linearisierung in Fixpunktnähe, $\mathcal{L}$ Matrix . . . . .	7
4.7 Kritischer Exponent $\nu$ . . . . .	7

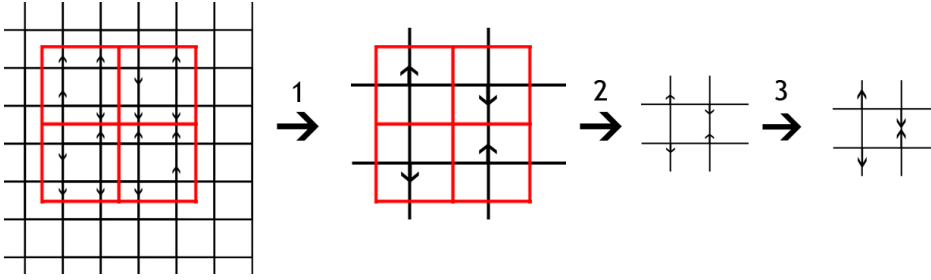


Abbildung 1: Graphische Darstellung der Renormierungstransformation

## 1 Formalismus der Renormierungsgruppe

### 1.1 Effektiver Hamiltonoperator

Man definiert den “effektiven Hamiltonoperator”  $H_{eff}$  als:

$$e^{H_{eff}} = \prod_{k>\Lambda} \int d\Phi_k e^{H(\Phi_k)} \quad (1)$$

Dabei ist  $\Lambda$  der Cutoff Impuls, der mindestens so groß wie der Gitterabstand ist, jedoch deutlich kleiner als die Skalen der beobachteten Prozesse. Das Inverse des Cutoff Impulses  $\Lambda^{-1}$  entspricht der minimalen Länge von Fluktuationen die im effektiven Hamiltonoperator erhalten bleiben sollen. Die Integration erfolgt über die Fourierkomponenten der Spinvariablen  $s_i$ :

$$s_i = l^{-\frac{d}{2}} \sum_k \Phi_k e^{ikr} \quad (2)$$

Die Temperaturabhängigkeit des statistischen Operators  $e^{-\frac{H}{k_b T}}$  wird in den Hamiltonoperator bzw. seine Parameter absorbiert und nicht gesondert erwähnt.

### 1.2 Renormierungstransformation und -gruppe

Als Renormierungstransformationen bezeichnet man jede Transformation  $\mathcal{R}_L$  so dass:

$$e^{H'} = e^{\mathcal{R}_L H} = \left[ \prod_{\frac{\Lambda}{L} < k < \Lambda} \int d\Phi_k e^{H(\Phi_k)} \right]_{\Phi_k \rightarrow \alpha_L \Phi_{Lk}} \quad (3)$$

**Definition:** Als Renormierungsgruppe bezeichnet man die Menge aller Transformationen  $\mathcal{R}_L$ , die der Vorschrift (3) genügen.

**Eigenschaften** von  $\mathcal{R}_L$ :

- Halbgruppeneigenschaft:

$$\mathcal{R}_L \circ \mathcal{R}_{L'} = \mathcal{R}_{L \cdot L'}$$

- i.A.  $\nexists \mathcal{R}_L^{-1}$  mit:

$$\mathcal{R}_L^{-1} \circ \mathcal{R}_L = 1 = \mathcal{R}_1$$

## 2 Hamilton'scher Fluss

### 2.1 Sukzessive Anwendung der Transformation

Hat man eine forminvariante Darstellung des Hamiltonoperators gefunden, so absorbieren die Parameter den Effekt von  $\mathcal{R}_L$  und wir können  $H$  eindeutig durch

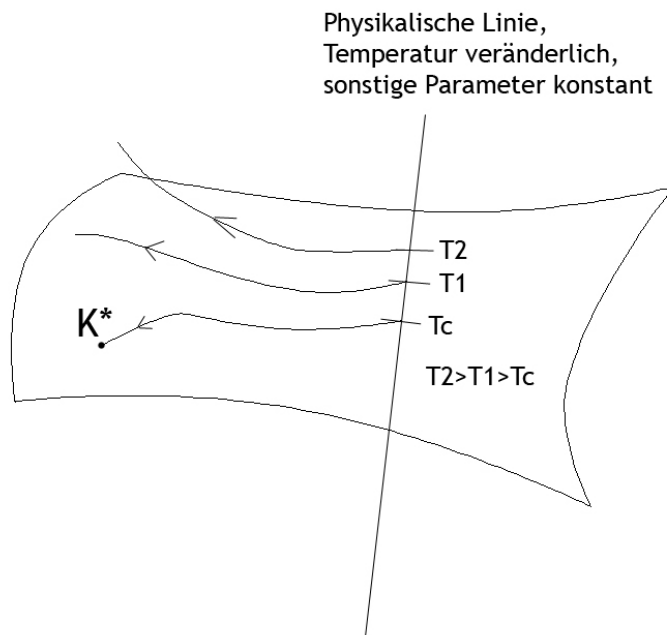


Abbildung 2: Darstellung des Hamilton'schen Flusses und Fixpunkt  $K^*$

seine Parameter  $\{K\}$  darstellen. Ein l-faches Anwenden der Renormierungstransformation können wir dann schreiben als:

$$\{K_l\} = \mathcal{R}_{L^l}\{K_0\} = \mathcal{R}_L \cdots \mathcal{R}_L\{K_0\} \quad (4)$$

Das führt zu einer rekursiven Abbildungsvorschrift:

$$\{K_{l+1}\} = \mathcal{R}_L\{K_l\} \quad (5)$$

Diese Gleichung beschreibt ein diskretes dynamisches System des Parameterraum, der eineindeutig mit dem Hamiltonoperator verknüpft ist. Den Verlauf der durch Gleichung (5) definierten Trajektorie im Parameterraum beschreibt man als *Hamilton'schen Fluss*.

## 2.2 Fixpunkte und kritische Fläche

Fixpunkte der Trajektorien bzw. des Hamilton'schen Flusses assoziieren wir mit kritischen Punkten, da diese skaleninvariant sind (bekannt aus früherem Vortrag). Die Fixpunkte sind wie folgt definiert:

$$H^* = \mathcal{R}_L H^* \quad \text{bzw.} \quad \{K^*\} = \mathcal{R}_L\{K^*\} \quad (6)$$

Als kritische Fläche definiert man dann die Menge aller Parameter  $\{K\}$  die durch wiederholte Anwendung der Renormierungstransformation auf einen definierten Fixpunkt  $K^*$  im Parameterraum laufen:

$$\{K_c\} = \{K \mid \lim_{n \rightarrow \infty} [(\mathcal{R}_L)^n\{K\}] = \{K^*\}\} \quad (7)$$

**Bemerkung:** Die Korrelationslänge  $\xi$  kontrahiert sich durch Anwendung der Renormierungstransformation um  $\frac{1}{L}$ . Da diese jedoch am kritischen Punkt unendlich groß ist, muss dies für die gesamte kritische Fläche der Fall sein.

### 3 Linearisierung und Operatorenklassifizierung

#### 3.1 Entwicklung in Fixpunktnähe

In Fixpunktnähe schreiben wir den Hamiltonoperator als

$$H = H^* + \delta H \quad (8)$$

und linearisieren die Transformation  $\mathcal{R}_L$  in der Umgebung der Fixpunkte durch die lineare Transformation  $\mathcal{L}_L$  wobei wir Terme der Ordnung  $\mathcal{O}(\delta H^2)$  vernachlässigen. Das Problem reduziert sich dadurch auf das Finden von Eigenoperatoren und Eigenwerten:

$$\delta H = \sum_i \mu_i Q_i \quad \mathcal{L}_L Q_i = \Lambda_i(L) Q_i \quad (9)$$

Wir können dann schreiben:

$$\delta H' = \mathcal{L}_L \delta H = \sum_i \mu_i \Lambda_i Q_i = \sum_i \mu'_i Q_i \quad (10)$$

und aus der Halbgruppeneigenschaft der Renormierungstransformation folgt:

$$\mathcal{L}_{L \cdot L'} Q_i = \mathcal{L}_L \mathcal{L}_{L'} Q_i \quad \rightarrow \quad \Lambda_i(L \cdot L') = \Lambda_i(L) \Lambda_i(L') \quad (11)$$

Wie bereits in früheren Vorträgen gezeigt, folgt aus (11), dass:

$$\Lambda_i(L) = L^{x_i} \quad \rightarrow \quad \mu'_i = L^{x_i} \mu_i \quad (12)$$

**Definition:**  $\{Q_i\}$  bezeichnet man als die Menge aller Basisoperatoren von  $H$  und  $\{\mu_i\}$  die jeweils dazu konjugierten Felder.

**Bemerkung:** Aus dem Transformationsverhalten der konjugierten Felder  $\{\mu_i\}$  lassen sich später die kritischen Exponenten berechnen (siehe Beispiel (4.7))

#### 3.2 Relevante, irrelevante und marginale Operatoren

Ein Vorteil der Renormierungsgruppe ist, dass sukzessives Anwenden der Transformation am kritischen Punkt mikroskopische Freiheitsgrade ausblendet, die für die makroskopischen Phänomene keine Rolle spielen. Die Basisoperatoren  $Q_i$ , die zu solchen Freiheitsgraden gehören, nennt man irrelevant. Ihre konjugierten Felder werden mit jeder Iteration schwächer. Wachsen die konjugierten Felder jedoch mit jeder Iteration, so nennt man den dazu gehörigen Operator relevant und dieser hat entscheidenden Einfluss auf die Phänomenologie am kritischen Punkt. Unveränderliche konjugierte Felder gehören zu marginalen Operatoren, die am kritischen Punkt unter Umständen einen Einfluss haben können in der Regel jedoch von den relevanten Operatoren dominiert werden. Man definiert also:

- Relevante Operatoren:  
 $x_i > 0$ ,  $\mu'_{ic} = L^{x_i} \mu_{ic}$  wächst mit jeder Iteration ( $L > 1$ )  
 $\rightarrow Q_i$  ist *relevanter Operator*
- Irrelevante Operatoren:  
 $x_i < 0$ , so schrumpft  $\mu_{ic}$  mit jeder Iteration  
 $\rightarrow Q_i$  ist *irrelevanter Operator*
- Marginale Operatoren:  
 $x_i = 0$ , dann bleibt  $\mu_{ic}$  konstant  
 $\rightarrow Q_i$  ist *marginaler Operator*

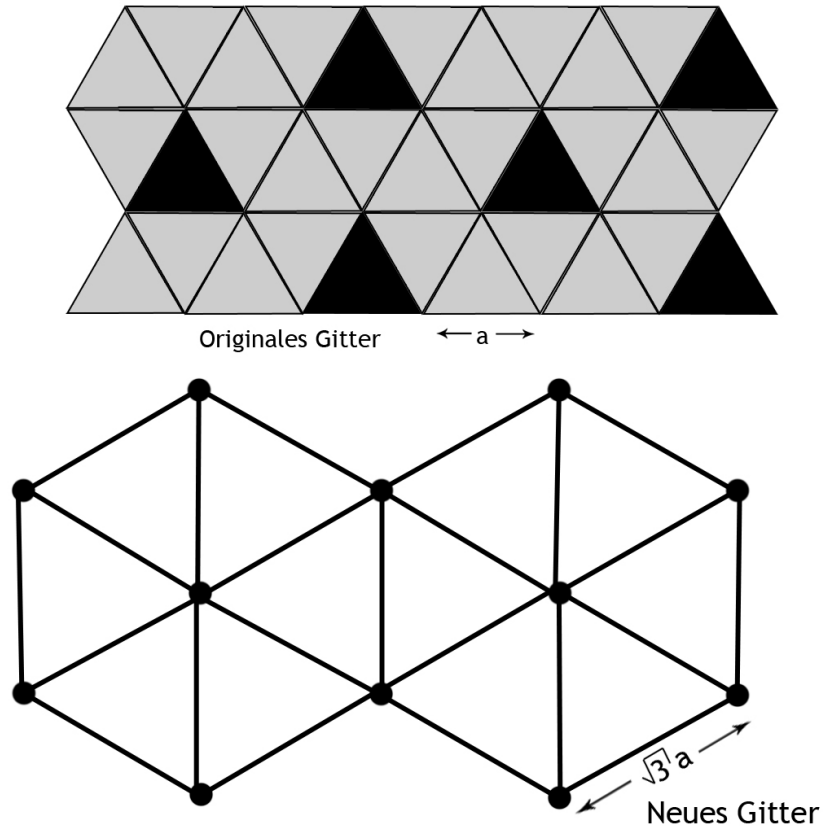


Abbildung 3: 3-er Blockspinrenormierung

## 4 Beispiel: Ising 2-d

### 4.1 Hamiltonoperator und Spinblöcke

$$H = K \sum_{\langle ij \rangle} s_i s_j + h \sum_i s_i$$

$$H(S_I, \sigma_I) = K \sum_I \sum_{i,j \in I} s_i^I s_j^I + K \sum_{I \neq J} \sum_{i \in I, j \in J} s_i^I s_j^J + h \sum_I \sum_{i \in I} s_i^I = H_0 + H_{int}$$

mit:

$$H_0 \equiv K \sum_I H_0^I \quad H_0^I \equiv \sum_{i,j \in I} s_i^I s_j^I \quad H_{int} \equiv K \sum_{I \neq J} \sum_{i \in I, j \in J} s_i^I s_j^J + h \sum_I \sum_{i \in I} s_i^I$$

Originalgitter  $\leftrightarrow i, j$

Blockgitter  $\leftrightarrow I, J$

$$S_I = \text{sgn}(s_1^I + s_2^I + s_3^I) = \frac{1}{2}(s_1^I + s_2^I + s_3^I - s_1^I s_2^I s_3^I) = \pm 1$$

## 4.2 Blockstruktur und Renormierung

Innere Blockstruktur:  $\{\sigma_I\}$ :

$$S_I = +1 \rightarrow \sigma_I = \left\{ \begin{array}{c} \uparrow\uparrow\uparrow \\ \uparrow\uparrow\downarrow \\ \uparrow\downarrow\uparrow \\ \downarrow\downarrow\uparrow \end{array} \right\} \quad S_I = -1 \rightarrow \sigma_I = \left\{ \begin{array}{c} \downarrow\downarrow\downarrow \\ \downarrow\downarrow\uparrow \\ \downarrow\uparrow\downarrow \\ \uparrow\downarrow\downarrow \end{array} \right\} \quad (13)$$

$\mathcal{R}_L$  entspricht Ausführen der Summation über  $\{\sigma_I\}$ : (vgl Schritt 1, Ausintegrieren mikroskopischer Konfigurationen)

$$\boxed{e^{H'(S_I)} = \sum_{\sigma_I} e^{H(S_I, \sigma_I)} = \sum_{\sigma_I} e^{H_0} e^{H_{int}} = \langle H_{int} \rangle_0 \sum_{\sigma_I} e^{H_0}} \quad (14)$$

mit:

$$\langle f \rangle_0 = \frac{\sum_{\sigma_I} f e^{H_0}}{\sum_{\sigma_I} e^{H_0}}$$

## 4.3 Zustandssumme und Notwendigkeit der Spinreskalierung

Berechnen der Summe:

$$\sum_{\sigma_I} e^{H_0} = \sum_{\sigma_I} e^{\sum_I H_0^I} = \sum_{\sigma_I} \prod_I e^{K \sum_{i,j \in I} s_i^I s_j^I} = \sum_{\sigma_I} \prod_I e^{K(s_1^I s_2^I + s_2^I s_3^I + s_3^I s_1^I)} = Z_0(K)^{N'}$$

Wobei  $N'$  die Anzahl der Spinblöcke ist. Außerdem:

$$\sum_{\sigma_I} e^{K(s_1^I s_2^I + s_2^I s_3^I + s_3^I s_1^I)} = e^{3K} + 3e^{-K} = Z_0(K)$$

Durch Logarithmieren von Gleichung (14) erhält man:

$$H' = \ln(\langle e^{H_{int}} \rangle_0) + \ln(\sum_{\sigma_I} e^{H_0}) = \ln(\langle e^{H_{int}} \rangle_0) + N' \ln(Z_0(K)) \quad (15)$$

Für  $\ln(\langle e^{H_{int}} \rangle_0)$  benutzen wir die Kumulantenentwicklung:

$$\ln(\langle e^{H_{int}} \rangle_0) = \langle H_{int} \rangle_0 + \frac{1}{2}(\langle H_{int}^2 \rangle_0 - \langle H_{int} \rangle_0^2) + h.o.t.$$

Des weiteren hängt der Term  $N' \ln Z_0(K)$  nicht vom Block I ab und entspricht daher dem regulären Anteil des Hamiltonoperators und wird im folgenden vernachlässigt. In erster Ordnung der Kumulantenentwicklung ergibt sich dann:

$$H' = \langle H_{int} \rangle_0$$

Zur Berechnung von  $\langle H_{int} \rangle_0$  brauchen wir  $\langle s_i^I \rangle_0$ :

$$\langle s_i^I \rangle_0 = \frac{\sum_{\sigma_I} s_i^I e^{H_0}}{Z_0(K)} = Z_0^{-1}(K) \cdot \sum_{\sigma_I} s_i^I e^{K(s_1^I s_2^I + s_2^I s_3^I + s_3^I s_1^I)}$$

Mit Gleichung (13) folgt:

$$\sum_{\sigma_I} s_i^I e^{K(s_1^I s_2^I + s_2^I s_3^I + s_3^I s_1^I)} = (e^{3K} + e^{-K}) \cdot S_I$$



Also:

$$\boxed{\langle s_i^I \rangle_0 = \frac{(e^{3K} + e^{-K}) \cdot S_I}{Z_0(K)}} \quad (16)$$

*Hier erkennt man die Notwendigkeit der Spinreskalierung*

$$\boxed{S_I = \text{sgn}(s_1^I + s_2^I + s_3^I) = \frac{1}{2}(s_1^I + s_2^I + s_3^I - s_1^I s_2^I s_3^I) = \pm 1}$$

*sodass z.B. innere Bockstruktur  $\uparrow\uparrow\uparrow$  und  $\uparrow\uparrow\downarrow$  zu gleichem Bockspin  $S_I$  führt, ansonsten wäre die Formulierung eines unter RGTs forminvarianten Hamiltonoperators nicht möglich!*

#### 4.4 Berechnung des renormierten Hamiltonoperators

Berechnung von  $\langle H_{int} \rangle_0$ :

$$H' = \langle H_{int} \rangle_0 \quad H_{int} = K \sum_{I \neq J} \sum_{i \in I, j \in J} s_i^I s_j^J + h \sum_I \sum_{i \in I} s_i^I$$

Aus der Abbildung des Gitters folgt:

$$K \sum_{I \neq J} \sum_{i \in I, j \in J} s_i^I s_j^J = K \sum_{\langle IJ \rangle} H_{int}^{IJ} \quad H_{int}^{IJ} = K \cdot s_3^I (s_1^J + s_2^J)$$

Dann:

$$H' = \langle H_{int} \rangle_0 = \sum_{\langle IJ \rangle} K \cdot (\langle s_3^I s_1^J \rangle_0 + \langle s_3^I s_2^J \rangle_0) + h \sum_I (\langle s_1^I \rangle_0 + \langle s_2^I \rangle_0 + \langle s_3^I \rangle_0)$$

Aus Gleichung (16) folgt, dass der Mittelwert von  $\langle s_i^I \rangle_0$  nicht vom blockinternen Index  $i$  abhängt, daher:

$$\langle H_{int} \rangle_0 = 2K \sum_{\langle IJ \rangle} \langle s_3^I s_1^J \rangle_0 + 3h \sum_I \langle s_1^I \rangle_0 = 2K \sum_{\langle IJ \rangle} \langle s_3^I \rangle_0 \langle s_1^J \rangle_0 + 3h \sum_I \langle s_1^I \rangle_0$$

Einsetzen von Gleichung (16) ergibt:

$$\boxed{H' = \langle H_{int} \rangle_0 = 2K\psi^2(K) \sum_{\langle IJ \rangle} S_I S_J + 3h\psi(K) \sum_I S_I} \quad (17)$$

mit:

$$\psi(K) \equiv \langle s_i^I \rangle_0 = \frac{(e^{3K} + e^{-K})}{e^{3K} + 3e^{-K}} = \frac{(e^{3K} + e^{-K})}{Z_0(K)}$$

*Die eingerahmte Gleichung zeigt die forminvariante Darstellung des Hamiltonoperators und führt zu den rekursiven Gleichungen für die Parameter  $K$  und  $h$ .*

#### 4.5 Rekursive Gleichungen und Fixpunkte

Aus Gleichung (17) folgen die rekursiven Gleichungen:

$$K_{l+1} = 2K_l \psi^2(K_l)$$

$$h_{l+1} = 3h_l \psi(K_l)$$

Man findet nichttrivialen Fixpunkt nur für  $h = 0$  (siehe Abbildung 4), was physikalisch auch sinnvoll ist:

$$K^* = \frac{1}{4} \ln(1 + 2\sqrt{2}) \approx 0,336$$

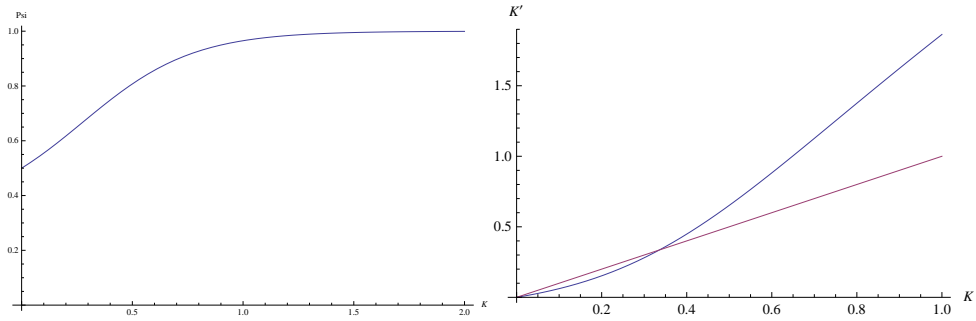


Abbildung 4: Links:  $\psi(K)$  gegen  $K$ , Rechts:  $K_{l+1}$  gegen  $K_l$  und Identität

## 4.6 Linearisierung in Fixpunktnähe, $\mathcal{L}$ Matrix

Schreiben rekursive Gleichungen als dynamischen System,  $K \leftrightarrow x$  und  $h \leftrightarrow y$ :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x\psi^2(x) \\ 3y\psi(x) \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} F_1(x, y) \\ F_2(x, y) \end{pmatrix}$$

Linearisierte Matrix  $\mathcal{L}$  ist dann die Jacobimatrix zu  $\underline{F} \equiv \begin{pmatrix} F_1(x, y) \\ F_2(x, y) \end{pmatrix}$ :

$$\mathcal{L} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1(x, y)}{\partial x} & \frac{\partial F_1(x, y)}{\partial y} \\ \frac{\partial F_2(x, y)}{\partial x} & \frac{\partial F_2(x, y)}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1(x)}{\partial x} & 0 \\ \frac{\partial F_2(x, y)}{\partial x} & \frac{\partial F_2(x, y)}{\partial y} \end{pmatrix}$$

Für  $x = x^* = \frac{1}{4} \ln(1 + 2\sqrt{2}) \approx 0,336$  und  $y = y^* = 0$ . Damit:

$$\mathcal{L} = \begin{pmatrix} \frac{2(10+7\sqrt{2}+(5+3\sqrt{2})\ln[1+2\sqrt{2}])}{(2+\sqrt{2})^3} & 0 \\ 0 & \frac{3}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1,624 & 0 \\ 0 & 2,121 \end{pmatrix}$$

Somit finden wir die Eigenwerte  $\Lambda_K$  und  $\Lambda_h$ :

$$\Lambda_K = 1,624 \quad \Lambda_h = 2,121$$

da  $\Lambda_{K,h} > 1$  ist  $\ln(\Lambda_{K,h}) > 0$  und somit sind beide dazugehörigen Operatoren *relevant* am kritischen Punkt.

## 4.7 Kritischer Exponent $\nu$

Da wir eine  $L = \sqrt{3}$  Längenkontraktion haben, berechnet sich der kritische Exponent der Korrelationslänge  $\nu$  wie folgt:

$$\nu = \frac{\ln(\sqrt{3})}{\ln(\Lambda_K)} \approx 1,130$$

Zum Vergleich: die exakte Lösung von Onsager ergibt  $\nu = 1$ . Nimmt man höhere Terme der Kumulantenentwicklung mit, ergibt sich 0,98 respektive 0,99.