

# Ising Modell I: Grundlagen und Lösung in einer Dimension

Ansgar Hebbelmann

13.12.2009

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einführung</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Annahmen des Ising-Modells</b>	<b>3</b>
<b>3</b>	<b>Eindimensionales Ising-Modell ohne äußeres Magnetfeld (<math>B_0 = 0</math>)</b>	<b>4</b>
3.1	Berechnung der Zustandssumme . . . . .	4
3.2	Berechnung der Magnetisierung . . . . .	5
<b>4</b>	<b>Eindimensionales Ising-Modell mit äußerem Magnetfeld (<math>B_0 \neq 0</math>)</b>	<b>7</b>
4.1	Berechnung der Zustandssumme anhand der Transfer-Matrix-Methode	7
<b>5</b>	<b>Thermodynamik des eindimensionalen Ising-Modells</b>	<b>8</b>
<b>6</b>	<b>Gitter-Gas-Analogie</b>	<b>11</b>
6.1	Definition des Gitter-Gas-Modells . . . . .	11
6.2	Zusammenhang der Zustandssumme mit der des Ising-Modells . .	12

# 1 Einführung

Das Ising-Modell ist ein Modell der Theoretischen Statistischen Physik, das dem Verständnis von Ferromagnetismus im Festkörper dienen soll. Es soll insbesondere der Untersuchung von Phasenübergängen und kritischen Phänomenen dienen. Das Modell wurde von Ernst Ising, nach dem es auch benannt ist, im Rahmen seiner Doktorarbeit an der Universität Hamburg im Zeitraum 1922-1924 entwickelt. Die Anregung dazu kam von seinem Doktorvater Wilhelm Lenz.

Ernst Ising selber konnte das von ihm entwickelte Modell nur in einer Dimension lösen und fand dort nur einen Phasenübergang bei  $T = 0$ . Dies war eine große Enttäuschung für ihn, da er im Voraus hoffte einen bei endlicher Temperatur zu finden.

Das Modell konnte im Jahr 1944 von Onsager in zwei Dimensionen exakt gelöst werden. Diese Lösung zeigte einen Phasenübergang bei endlicher Temperatur, womit das Modell an Bedeutung gewann.

In drei Dimensionen konnte das Modell bisher noch nicht exakt, aber durch Simulationen quasiexakt gelöst werden.

Das Ising-Modell ist bis heute eines der meistuntersuchtesten Modelle der Statistischen Physik. Es ist bis heute das einzig halbwegs realistische Modell eines Viel-Teilchen-Systems, das einen Phasenübergang zeigt und mathematisch streng behandelt werden kann. Für ein Viel-Teilchen-System besitzt es eine antitypische Fülle an exakten Resultaten. Es ist aufgrund seiner einfachen Annahmen auch ein Demonstrationsmodell der Statistischen Physik. Dennoch steht es im Mittelpunkt vieler Überlegungen zur Theorie der Phasenübergänge und kritischen Phänomene, da es trotz seiner Einfachheit einen Phasenübergang zweiter Ordnung zeigt.

Außerdem zeigt es Analogien zu anderen Modellen, wie dem Gittergas-Modell oder dem 2-atomigen Legierungs-Modell.

# 2 Annahmen des Ising-Modells

Das Ising-Modell ist ein Spezialfall des Heisenberg-Modells. Es nimmt an, dass das ferromagnetische System in ein  $d$  dimensionales Gitter mit  $N$  Gitterpunkte eingeteilt ist. Diese sind alle mit einem permanenten magnetischen Moment

$$\mu_i = \mu S_i \quad i = 1, \dots, N \quad (1)$$

versehen, wobei  $S_i = \pm 1$  die klassische Spinvariable ist. Das bedeutet sie können sich parallel oder antiparallel zu einer ausgezeichneten Richtung einstellen. Diese ausgezeichnete Richtung wird falls ein äußeres Magnetfeld existiert, von diesem vorgegeben.

Diese magnetischen Momente wechselwirken als nächste Nachbarn untereinander und mit dem äußeren Magnetfeld  $\vec{B}_0$ . Das ergibt dann folgende Hamilton-

Funktion:

$$H = - \sum_{i,j} J_{ij} S_i S_j - \mu B_0 \sum_i S_i \quad \text{mit} \quad \vec{B}_0 = B_0 \cdot \vec{e}_z \quad (2)$$

wobei  $J_{ij}$  die Wechselwirkungskonstante zur Beschreibung der Wechselwirkung zwischen den magnetischen Momenten ist. Das Magnetfeld  $\vec{B}_0 = B_0 \vec{e}_z$  definiert die z-Achse als Auszeichnungsrichtung für die magnetischen Momente. Diese stellen sich nun antiparallel oder parallel zum Magnetfeld.

Die Zustandssumme und damit wichtige thermodynamische Größen kann bei Beschränkung auf Wechselwirkung unter nächsten Nachbarn und unter bestimmten Rahmenbedingungen, wie z.B. isotroper Wechselwirkung ( $J_{ij} = J$  für alle i,j), für  $d = 1, 2$  exakt berechnet werden.

### 3 Eindimensionales Ising-Modell ohne äußeres Magnetfeld ( $B_0 = 0$ )

Das eindimensionale Ising-Modell kann man als eine Kette von Spins auffassen, die entweder nach oben oder nach unten zeigen (s. Abb. 1).

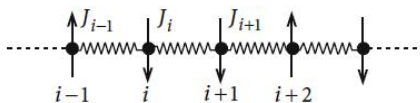


Abbildung 1: Darstellung der Spinkette (Quelle: W. Nolting - Grundkurs Theoretische Physik: Band 6)

Bei der Betrachtung ohne äußerem Magnetfeld, wird untersucht ob es eine Temperatur  $T = T_C$  gibt unterhalb der sich eine spontante Magnetisierung  $M_S(T)$  einstellt, also ob das System einen Phasenübergang zeigt. Dazu wird zunächst die Zustandssumme des Systems berechnet.

#### 3.1 Berechnung der Zustandssumme

Die Hamilton-Funktion lautet nun:

$$H = - \sum_{i=1}^{N-1} J_i S_i S_{i+1} \quad (3)$$

Dabei wird nur eine Wechselwirkung zwischen nächsten Nachbarn betrachtet, die zunächst als anisotrop angesehen wird. Wir definieren zunächst:

$$j_i = \beta J_i \quad (4)$$

um die Zustandssumme

$$Z_N = Z_N(j_1, \dots, j_N) = \sum_{S_1} \sum_{S_2} \dots \sum_{S_N} e^{\sum_{i=1}^{N-1} j_i S_i S_{i+1}} \quad (5)$$

zu berechnen. Die Berechnung erfolgt über eine Rekursionsformel. Wenn man die Spinkette um einen weiteren Spin ergänzt würde die Zustandssumme

$$\begin{aligned} Z_{N+1} &= \sum_{S_1} \sum_{S_2} \dots \sum_{S_N} e^{\sum_{i=1}^{N-1} j_i S_i S_{i+1}} \sum_{S_{N+1}} e^{j_N S_N S_{N+1}} \\ &= Z_N \sum_{S_{N+1}} e^{j_N S_N S_{N+1}} \\ &= 2Z_N \cosh(j_N S_N) \\ &= 2Z_N \cosh(j_N) \end{aligned}$$

lauten. Dabei hat man ausgenutzt, dass  $S_{N+1} = \pm 1$  und  $\cosh(-x) = \cosh(x)$  ist. Mit N-facher Ausführung dieser Rekursionsformel erhält man dann:

$$Z_{N+1} = Z_1 2^N \prod_{i=1}^N \cosh(j_i) \quad (6)$$

Dabei ist  $Z_1$  die Zustandssumme eines Einzelspins. Er besitzt zwei Zustände  $S_1 = \pm 1$  zur Energie Null, da er keine Wechselwirkungsmöglichkeiten hat. Damit gilt:

$$Z_1 = \sum_{S_1} e^0 = 2 \quad (7)$$

und für die Spinkette mit N-Gitterpunkten ergibt sich:

$$Z_N(T) = 2^N \prod_{i=1}^{N-1} \cosh(\beta J_i) \quad (8)$$

Das heißt bei isotroper Wechselwirkung  $J_i = J$  für alle i ergibt sich:

$$Z_N(T) = 2^N \cosh^{N-1}(\beta J) \quad (9)$$

### 3.2 Berechnung der Magnetisierung

Die spontante Magnetisierung ist proportional zum Erwartungswert des Spins:

$$M_S(T) = \mu \langle S \rangle \quad (10)$$

Um  $\langle S \rangle$  zu erhalten berechnet man zunächst den Erwartungswert vom Produkt zweier Spins:

$$\begin{aligned}
\langle S_i S_{i+j} \rangle &= \frac{1}{Z_N} \sum_{\{S\}} (S_i S_{i+j}) e^{\sum_{i=1}^{N-1} j_i S_i S_{i+1}} \\
&= \frac{1}{Z_N} \sum_{\{S\}} (S_i \underbrace{S_{i+1}}_1) (\underbrace{S_{i+2}}_1) \cdots (\underbrace{S_{i+j-1}}_1) S_{i+j} e^{\sum_{i=1}^{N-1} j_i S_i S_{i+1}} \\
&= \frac{1}{Z_N} \left( \frac{\partial}{\partial j_i} \frac{\partial}{\partial j_{i+1}} \cdots \frac{\partial}{\partial j_{i+j-1}} \right) Z_N \\
&= \frac{\cosh j_1 \cdots \cosh j_{i-1} \sinh j_i \cdots \sinh j_{i+j-1} \cosh j_{i+j} \cdots \cosh j_{N-1}}{\cosh j_1 \cdots \cosh j_{i-1} \cosh j_i \cdots \cosh j_{i+j-1} \cosh j_{i+j} \cdots \cosh j_{N-1}} \\
&= \prod_{k=1}^j \tanh(\beta J_{i+k-1})
\end{aligned}$$

Bei isotroper Wechselwirkung ( $J_i = J$  für alle  $i$ ) ergibt sich dann:

$$\langle S_i S_{i+j} \rangle = \tanh^j(\beta J) \quad (11)$$

Mit diesem Term kann man nun den Erwartungswert eines einzelnen Spins  $\langle S \rangle$  bestimmen. Wenn  $j \rightarrow \infty$  ist die Korrelation zwischen Spin  $i$  und Spin  $j$   $g_{i,i+j} = 0$ . Damit folgt:

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \langle S_i S_{i+j} \rangle = \langle S_i \rangle \langle S_{i+j} \rangle = \langle S \rangle^2 \quad (12)$$

Damit gilt für die spontante Magnetisierung

$$M_S(T)^2 = \mu^2 \lim_{j \rightarrow \infty} \langle S_i S_{i+j} \rangle \quad (13)$$

Da

$$\tanh(\beta J) = \begin{cases} < 1, & \text{für } T > 0 \\ 1, & \text{für } T=0 \end{cases} \quad (14)$$

gilt für die spontane Magnetisierung

$$M_S(T) = \begin{cases} 0, & \text{für } T > 0 \\ \mu, & \text{für } T=0 \end{cases} \quad (15)$$

Das bedeutet es gibt bei endlichen Temperaturen keine spontante Magnetisierung und damit keinen Phasenübergang. Man kann zwar sagen, dass es bei  $T=0$  einen Phasenübergang gibt und damit  $T_C = 0$  die kritische Temperatur ist. Dieser Phasenübergang spielt in der Realität aber keine Rolle.

## 4 Eindimensionales Ising-Modell mit äußerem Magnetfeld ( $B_0 \neq 0$ )

### 4.1 Berechnung der Zustandssumme anhand der Transfer-Matrix-Methode

Die Zustandssumme für das eindimensionale Ising-Modell mit äußerem Magnetfeld kann man sehr gut mit der Transfer-Matrix-Methode berechnen. Diese wurde von Lars Onsager im Jahr 1944 entwickelt um das Modell in 2 Dimensionen zu berechnen.

Bei der Berechnung wird wieder nur eine Nächste-Nachbar-Wechselwirkung angenommen. Diese soll diesmal von Beginn an isotrop sein. Mit den Definitionen  $j = \beta J$  und  $b = \beta \mu B_0$  gilt nun:

$$-\beta H = j \sum_{i=1}^N S_i S_{i+1} + b \sum_{i=1}^N S_i \quad (16)$$

Bei der Berechnung benutzt man eine periodische Randbedingung. Man schließt die Spinkette zu einem Ring zusammen, so dass gilt:

$$S_1 = S_{N+1} \quad (17)$$

Diese Randbedingung ist im thermodynamischen Limes  $N \rightarrow \infty$  keine Einschränkung auf das System.

Zur Berechnung der Zustandssumme definiert man zunächst die Transferfunktion:

$$T_{i,i+1} = e^{j S_i S_{i+1} + \frac{1}{2} b (S_i + S_{i+1})} \quad (18)$$

Damit gilt unter Berücksichtigung der periodischen Randbedingung Gl.17:

$$e^{-\beta H} = T_{1,2} T_{2,3} \dots \underbrace{T_{N,N+1}}_{=T_{N,1}} \quad (19)$$

Mit der Transfermatrix:

$$\hat{T} = \begin{pmatrix} e^{j+b} & e^{-j} \\ e^{-j} & e^{j-b} \end{pmatrix} \quad (20)$$

und Spinzuständen:

$$|S_i = +1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad |S_i = -1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (21)$$

ergibt sich für die Transferfunktion

$$\langle S_i | \hat{T} | S_{i+1} \rangle = T_{i,i+1} \quad (22)$$

Damit ergibt sich für die Zustandssumme:

$$\begin{aligned}
Z_N(T, B_0) &= \sum_{S_1} \sum_{S_2} \dots \sum_{S_N} T_{1,2} T_{2,3} \dots T_{N,1} \\
&= \sum_{S_1} \sum_{S_2} \dots \sum_{S_N} \langle S_1 | \hat{T} | S_2 \rangle \langle S_2 | \hat{T} | S_3 \rangle \dots \langle S_N | \hat{T} | S_1 \rangle \\
&= \sum_{S_1} \langle S_1 | \hat{T}^N | S_1 \rangle = Sp \hat{T}^N
\end{aligned}$$

Dabei hat man die Beziehung  $\sum_{S_i} |S_i\rangle \langle S_i| = \mathbf{1}$ , die aus der Vollständigkeit der Spinzustände folgt, verwendet.

Die Spur einer Matrix ist invariant unter Basistransformationen und daher gilt:

$$Z_N(T, B_0) = E_+^N + E_-^N \quad (23)$$

wobei  $E_{\pm}$  die Eigenwerte der Transfermatrix  $\hat{T}$  sind. Diese lassen sich aus  $\det|\hat{T} - E\mathbf{1}| = 0$  berechnen und ergeben:

$$E_{\pm} = e^j \left[ \cosh b \pm \sqrt{\cosh^2 b - 2e^{-2j} \sinh(2j)} \right] \quad (24)$$

Da  $E_+ > E_-$  gilt für die Zustandssumme:

$$Z_N(T, B_0) = E_+^N \left[ 1 + \left( \frac{E_-}{E_+} \right)^N \right] \xrightarrow{N \gg 1} E_+^N \quad (25)$$

Bei abgeschaltetem Magnetfeld gilt:

$$E_{\pm}(T, B_0 = 0) = e^j \pm e^{-j} \quad (26)$$

Damit gilt für die Zustandssumme:

$$Z_N(T, B_0 = 0) \underset{N \gg 1}{=} 2^N \cosh^N(\beta J) \quad (27)$$

Diese ist im thermodynamischen Limes äquivalent zu der ohne Randbedingung Gl.9.

## 5 Thermodynamik des eindimensionalen Ising-Modells

Die thermische Zustandsgleichung des eindimensionalen Ising-Modells kann über das magnetische Moment ausgedrückt werden. Das magnetische Moment berech-



net sich mit:

$$\begin{aligned}
 M(T, B_0) &= \frac{1}{Z_N} \sum_{\{S\}} \left( \mu \sum_{i=1}^N S_i \right) e^{\beta J \sum_{i=1}^{N-1} S_i S_{i+1} + \beta \mu B_0 \sum_{i=1}^N S_i} \\
 &= \frac{1}{\beta} \left( \frac{\partial}{\partial B_0} \ln Z_N(T, B_0) \right)_T \\
 &\stackrel{N \gg 1}{\approx} \frac{N}{\beta} \frac{1}{E_+} \frac{\partial E_+}{\partial B_0}
 \end{aligned}$$

Die partielle Ableitung des positiven Eigenwertes der Transfermatrix ist:

$$\frac{\partial E_+}{\partial B_0} = E_+ \frac{\mu \beta \sinh(\mu \beta B_0)}{\sqrt{\cosh^2(\mu \beta B_0) - 2e^{-2\beta J} \sinh(2\beta J)}}$$

Damit ist das Magnetische Moment:

$$M(T, B_0) = N \mu \frac{\sinh(\beta \mu B_0)}{\sqrt{\cosh^2(\beta \mu B_0) - 2e^{-2\beta J} \sinh(2\beta J)}} \quad (28)$$

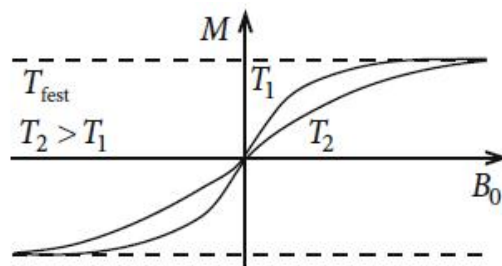


Abbildung 2: Isothermen des Magnetischen Moments (Quelle: W. Nolting - Grundkurs Theoretische Physik: Band 6)

In Abb.2 erkennt man, dass keine spontane Magnetisierung bei  $B_0 = 0$  für  $T > 0$  vorliegt und dass die Magnetisierung sich bei  $B_0 \neq 0$  mit dem Magnetfeld ausrichtet. Das bedeutet das d=1 Ising Modell ist für  $T \neq 0$  paramagnetisch. Das Magnetische Moment nimmt für  $B_0 \rightarrow \infty$  einen Sättigungswert  $M(T, B_0) \rightarrow N\mu$  an, d.h. alle magnetischen Momente richten sich parallel zum Magnetfeld aus. Um die Entropie des Systems für  $B_0 = 0$  zu berechnen muss man zunächst die Freie Energie F bei  $B_0 = 0$  bestimmen:

$$F(T) = -k_B T \ln Z_N(T, 0) = -N k_B T \ln[2 \cosh(\beta J)] \quad (29)$$

Damit erhält man die Entropie durch Bildung der negativen partiellen Ableitung nach T:

$$S(T) = -\frac{\partial F}{\partial T} = N k_B \{ \ln[2 \cosh(\beta J)] - \beta J \tanh(\beta J) \} \quad (30)$$

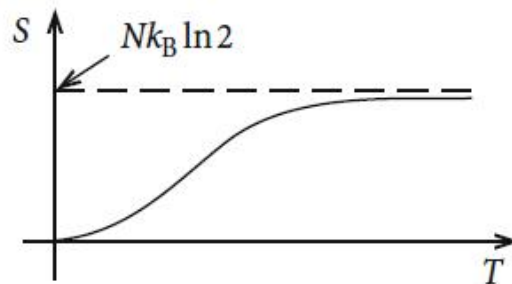


Abbildung 3: Entropie  $S(T)$  bei  $B_0 = 0$  (Quelle: W. Nolting - Grundkurs Theoretische Physik: Band 6)

In Abb.3 sieht man, dass das System den dritten Hauptsatz der Thermodynamik  $S(T \rightarrow 0) = 0$  erfüllt. Bei hohen Temperaturen beträgt die Entropie  $S(T \rightarrow \infty) = Nk_B \ln 2$ , d.h. jeder Spin trägt den gleichen Wert  $k_B \ln 2$  zur Entropie bei.

Aus der Entropie lässt sich nun die Wärmekapazität bei ausgeschaltetem Magnetfeld ableiten:

$$C_{B_0=0}(T) = T \left( \frac{\partial S}{\partial T} \right) \Big|_{B_0=0} = k_B \frac{\beta^2 J^2}{\cosh^2(\beta J)} \quad (31)$$

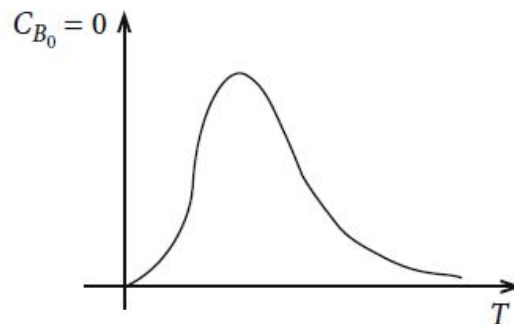


Abbildung 4: Wärmekapazität  $C(T)$  bei  $B_0 = 0$  (Quelle: W. Nolting - Grundkurs Theoretische Physik: Band 6)

In Abb.4 erkennt man, dass die Wärmekapazität ebenfalls den dritten Hauptsatz der Thermodynamik  $C_{B_0=0}(T \rightarrow 0) \rightarrow 0$  erfüllt.

Zuletzt ist noch die Suszeptibilität zu bestimmen. Mit dem Fluktuations-Dissipations-

Theorem gilt:

$$\begin{aligned}\chi_T(B_0 = 0) &= \beta\mu^2\mu_0 \sum_{i,j} (\langle S_i S_j \rangle - \langle S_i \rangle \langle S_j \rangle) \\ &= \beta\mu^2\mu_0 \sum_j \tanh^j(\beta J) \\ &= \frac{\beta\mu^2\mu_0}{1 - \tanh(\beta J)}\end{aligned}$$

Dabei hat man Gl.11,  $\langle S_i \rangle = \langle S_j \rangle = 0$  für  $B_0 = 0$  und die geometrische Reihe verwendet.

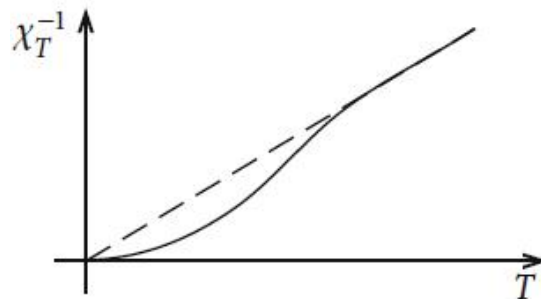


Abbildung 5: Inverse Suszeptibilität  $\chi_T$  bei  $B_0 = 0$  (Quelle: W. Nolting - Grundkurs Theoretische Physik: Band 6)

In der Abb.5 ist das Inverse der Suszeptibilität zu sehen. Man sieht, dass  $\chi_T$  bei  $T = 0$  divergiert, was ebenfalls auf einen Phasenübergang bei  $T = 0$  hindeutet. Für höhere Temperaturen gehorcht die Suszeptibilität dem Curie-Gesetz  $\chi = \frac{C}{T}$  (C: Curie-Konstante)

## 6 Gitter-Gas-Analogie

Wie bereits in der Einführung erwähnt, weißt das Ising-Modell Analogien zu anderen Modellen auf. Hier soll die Analogie zum Gitter-Gas-Modell diskutiert werden.

### 6.1 Definition des Gitter-Gas-Modells

Im Gitter-Gas-Modell wird ein Fluid mit Volumen  $V$  in  $n$  gleiche Zellen mit Volumen  $v$  aufgeteilt. Dabei ist  $v \approx$  das Volumen eines Fluidmoleküls. Eine Zelle ist besetzt, wenn das Zentrum eines Moleküls innerhalb der Zelle ist, ansonsten ist sie leer. Eine Zelle kann von höchstens einem Molekül besetzt werden, da

$v \approx V_{Mol}$ .

Dieses Verbot der doppelten Besetzung wird durch Hard-Core-Potential verboten

$$u(i, j) = \begin{cases} \infty, & \text{für } i = j \\ -J, & \text{falls } i, j \text{ nächste Nachbarn} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \quad (32)$$

welches eine Grobe Näherung des Lennard-Jones Potentials ist. Die Zellen sind entweder besetzt oder leer was anhand der Zellvariable  $e_i$  ausgedrückt werden kann.

$$e_i = \begin{cases} 1, & \text{falls Zelle } i \text{ besetzt} \\ 0, & \text{falls Zelle } i \text{ leer} \end{cases} \quad (33)$$

Dabei gilt  $\sum_{i=1}^n e_i = N$ , mit N Anzahl der Moleküle.

## 6.2 Zusammenhang der Zustandssumme mit der des Ising-Modells

Es besteht eine Proportionalität von der kanonischen Zustandssumme des Ising-Modells

$$Z_{Ising} = \sum_{\{S\}} e^{\beta J \sum_{\langle i, j \rangle} S_i S_j + \mu \beta B_0 \sum_i S_i}$$

und der des Gitter-Gas Modells im Großkanonischen Ensemble

$$\Xi_{GG} = \sum_{N=0}^{\infty} z^N e^{\beta J \sum_{\langle i, j \rangle} e_i e_j} \quad (34)$$

mit  $z = e^{\beta \mu}$  Fugazität und  $\mu$  chemisches Potential. Die eckigen Klammern um die Summationsvariablen bedeuten, dass nur über nächste Nachbarn summiert wird. Im Ising-Modell ist die Spinvariable  $S_i = \pm 1$ . Man kann nun die Zellvariable durch die Spinvariable ausdrücken:

$$e_i = \frac{1}{2}(1 + S_i), \quad \text{d.h. besetzt} \hat{=} \uparrow, \quad \text{leer} \hat{=} \downarrow \quad (35)$$

Für die großkanonische Zustandssumme des Gitter-Gas-Modells kann man nun noch einige Umformungen vornehmen, so dass sie ohne Einschränkung von N ist.

$$\begin{aligned} \Xi_{GG} &= \sum_{N=0}^{\infty} z^N e^{j \sum_{\langle i, j \rangle} e_i e_j} \quad \text{mit } j = \beta J \\ &= \sum_{N=0}^{\infty} z^{\sum_{i=1}^n e_i} e^{j \sum_{\langle i, j \rangle} e_i e_j} \quad \text{mit } \sum_{i=1}^n e_i = N \\ &= \sum_{\{e\}} e^{\ln(z) \sum_{i=1}^n e_i + j \sum_{\langle i, j \rangle} e_i e_j} \end{aligned}$$

Für das Produkt der Zellvariablen gilt:

$$e_i e_j = \frac{1}{2}(1 + S_i) \frac{1}{2}(1 + S_j) = \frac{1}{4} S_i S_j + \frac{1}{4}(S_i + S_j) + \frac{1}{4} \quad (36)$$

Dieses kann man jetzt einfach in die Zustandssumme einsetzen:

$$\Rightarrow \Xi_{GG} = \sum_{\{S\}} e^{\ln(z) \sum_{i=1}^n \frac{1}{2}(1+S_i) + j \sum_{\langle i,j \rangle} (\frac{1}{4} S_i S_j + \frac{1}{4}(S_i + S_j) + \frac{1}{4})} \quad (37)$$

$$= e^{\frac{n}{2}(\ln z + \frac{j}{2})} \sum_{\{S\}} e^{(\frac{\ln z}{2} + \frac{j}{2}) \sum_{i=1}^n S_i + \frac{j}{4} \sum_{\langle i,j \rangle} S_i S_j} \quad (38)$$

$$= Q_0^n \sum_{\{S\}} e^{J_0 \sum_{\langle i,j \rangle} S_i S_j + B_0 \sum_{i=1}^n S_i} \quad (39)$$

wobei  $Q_0 = e^{\frac{1}{2} \ln z + \frac{j}{4}}$ ,  $B_0 = \frac{\ln z}{2} + \frac{j}{2}$  und  $J_0 = \frac{j}{4}$  Konstanten sind. Damit hat man die großkanonische Zustandssumme  $\Xi_{GG}$  auf eine Form gebracht, die proportional zur kanonischen Zustandssumme des Ising Modells ist.