

Die Thermodynamik des Universums

Kai Walter

Contents

1	Einleitung	2
2	Gleichgewichtsthermodynamik	2
2.1	Quantengas -Einteilchensystem-	2
2.2	Quantengase -MehrteilchenSystem	3
2.3	Effektive Freiheitsgrade g_* und g_{*s}	4
2.4	Zeitabhängigkeit der Temperatur des Universums	4
3	Weggang vom Gleichgewicht	6
3.1	Boltzmann-Gleichung	6
3.2	Zwei Beispiele für die Entkopplung der Teilchen	8

1 Einleitung

Aus heutiger Sichtweise ist das Universum durch den 'Urknall' entstanden, bei dem Materie, Raum und Zeit aus einer ursprünglichen Singularität erzeugt wurden. Im Laufe der Zeit expandiert sich das Universum und kühlt ab, was man aus der heutigen Beobachtung des Universums schließen kann. Mit Hilfe der Theorie des Quantengases kann diese thermodynamische Entwicklung des Universums beschrieben werden.

2 Gleichgewichtsthermodynamik

2.1 Quantengas -Einteilchensystem-

Mit Hilfe der Theorie des Quantengases können die folgenden wichtigen thermodynamischen Größen berechnet werden.

$$\begin{aligned} \text{Teilchendichte:} \quad n &= \frac{g}{(2\pi)^3} \int f(\vec{p}) d^3p \\ \text{Energiedichte:} \quad \varrho &= \frac{g}{(2\pi)^3} \int E(\vec{p}) f(\vec{p}) d^3p \\ \text{Druck:} \quad p &= \frac{g}{(2\pi)^3} \int \frac{|\vec{p}|^2}{3E(\vec{p})} f(\vec{p}) d^3p \end{aligned}$$

Als Verteilungsfunktion $f(\vec{p})$ für Bosonen bzw. Fermionen ist die Bose-Einstein-Verteilungsfunktion ($f_B(\vec{p}) = \frac{1}{\exp\{(E-\mu)/T\}-1}$) bzw. Fermi-Dirac-Verteilungsfunktion ($f_F(\vec{p}) = \frac{1}{\exp\{(E-\mu)/T\}+1}$) zu verwenden. g ist die Anzahl der inneren Freiheitsgrade des betreffenden Teilchens. Durch Integration ergibt sich für die relativistischen und nichtrelativistischen Teilchen:

nicht-relativistisch ($m \gg T$)

$$n = g \left(\frac{mT}{2\pi} \right)^{3/2} \exp \left[-\frac{m-\mu}{T} \right], \quad \rho = m \cdot n, \quad p = nT \ll \rho \quad (1)$$

relativistisch ($T \gg m$ für $T \gg \mu$)

$$n = \begin{cases} \frac{\zeta(3)}{\pi^2} g T^3 & \text{(Bose)} \\ \frac{3}{4} \frac{\zeta(3)}{\pi^2} g T^3 & \text{(Fermi)} \end{cases}, \quad \rho = \begin{cases} \frac{\pi^2}{30} g T^4 & \text{(Bose)} \\ \frac{7}{8} \frac{\pi^2}{30} g T^4 & \text{(Fermi)} \end{cases}, \quad p = \frac{\rho}{3} \quad (2)$$

Man kann hieraus ablesen, dass relativistische Teilchen eine größere Teilchendichte n , Energiedichte ρ und einen größeren Druck p haben.

2.2 Quantengase -MehrteilchenSystem

Die Verallgemeinerung für das Mehrteilchensystem erfolgt über die Summenbildung über alle Teilchensorten. Hierbei wird zweckmäßigerweise die Photontemperatur T als Bezugstemperatur eingeführt. Aus (2) folgt dann für die relativistischen Teilchen

$$\rho_R = T^4 \frac{\pi^2}{30} \sum_{Bosonen} g_i \left(\frac{T_i}{T} \right)^4 + \frac{7}{8} T^4 \frac{\pi^2}{30} \sum_{Fermionen} g_i \left(\frac{T_i}{T} \right)^4$$

wobei g_i die inneren Freiheitsgrade und T_i die Temperaturen der einzelnen Teilchen darstellen.

Durch die Definition des **effektiven Freiheitsgrades** g_*

$$g_* = \sum_{Bosonen} g_i \left(\frac{T_i}{T} \right)^4 + \frac{7}{8} \sum_{Fermionen} g_i \left(\frac{T_i}{T} \right)^4 \quad (3)$$

kann diese in ähnlicher Form wie beim Einteilchensystem geschrieben werden.

$$\rho_R = \frac{\pi^2}{30} g_* T^4, \quad p_R = \frac{\rho_R}{3} = \frac{\pi^2}{90} g_* T^4 \quad (4)$$

Zusätzlich für Entropie-Dichte s gilt aus dem 2. HS der Thermodynamik:

$$s = \frac{S}{V} = \frac{\rho + p}{T} = \frac{2\pi^2}{45} g_{*s} T^3 \quad (5)$$

mit dem effektiven Freiheitsgrad für die Entropie g_{*s}

$$g_{*s} = \sum_{Bosonen} g_i \left(\frac{T_i}{T} \right)^3 + \frac{7}{8} \sum_{Fermionen} g_i \left(\frac{T_i}{T} \right)^3 \quad (6)$$

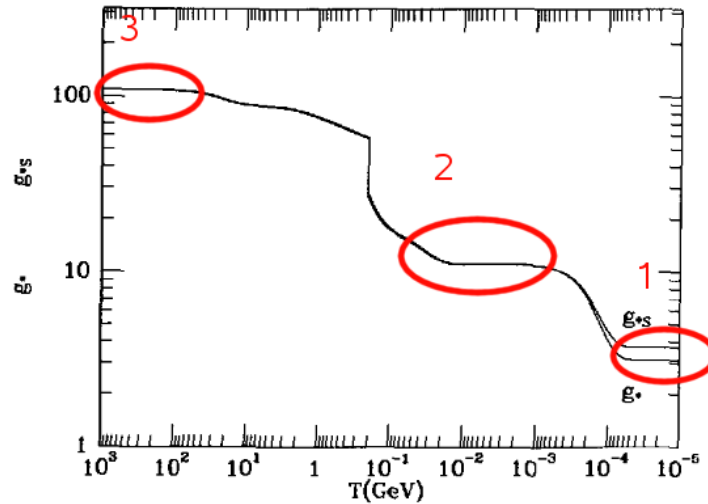
Da der Beitrag von relativistischen Teilchen zu dieser Größe wesentlich größer ist als der von nicht-relativistischen Teilchen, kann diese Formel in guter Näherung für das System aller Teilchen verwendet werden.

Eine weitere wichtige Größe ist die Teilchenanzahl Y , die durch $\frac{n}{s}$ gegeben ist. Für eine Teilchensorte im Gleichgewicht gilt:

$$Y = \frac{45\zeta(3)g}{2\pi^4 g_{*s}} \quad T \gg m, \mu \quad (7)$$

$$Y = \frac{45g}{4\sqrt{2}\pi^5 g_{*s}} (m/T)^{3/2} \exp(-m/T + \mu/T) \quad T \ll m \quad (8)$$

2.3 Effektive Freiheitsgrade g_* und g_{*s}



Da bei den effektiven Freiheitsgraden nur relativistische Teilchen berücksichtigt werden, werden diese kleiner mit abnehmender Anzahl der relativistischen Teilchen. Die obige Abbildung zeigt graphisch das Verhalten von g_* und g_{*s} in Abhängigkeit von der Photonentemperatur T . Man erkennt drei Plateaubereiche im Kurvenverlauf.

1. ($T \ll \text{MeV}$) Nur die drei leichten Neutrinos und Photonen sind relativistisch
 $g_* = 3,36$, $g_{*s} = 3,91$
2. ($1 \lesssim T \lesssim 100 \text{ MeV}$) Elektronen und Positronen sind ebenfalls relativistisch
 $g_* = g_{*s} = 10,75$
3. ($T \gtrsim 300 \text{ MeV}$) Alle Teilchen im Standardmodell sind relativistisch
 $g_* = g_{*s} = 106,75$

2.4 Zeitabhängigkeit der Temperatur des Universums

Bisher wurden die wichtigen thermodynamischen Größen wie Druck, Dichte und Entropie für eine vorgegebene Temperatur berechnet. Es ist daher auch von großem Interesse die Zeitabhängigkeit der Temperatur zu kennen. Diese Information kann aus der Friedmann-Gleichung gewonnen werden.

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho \quad \text{Friedmann-Gleichung für das flache Universum}$$

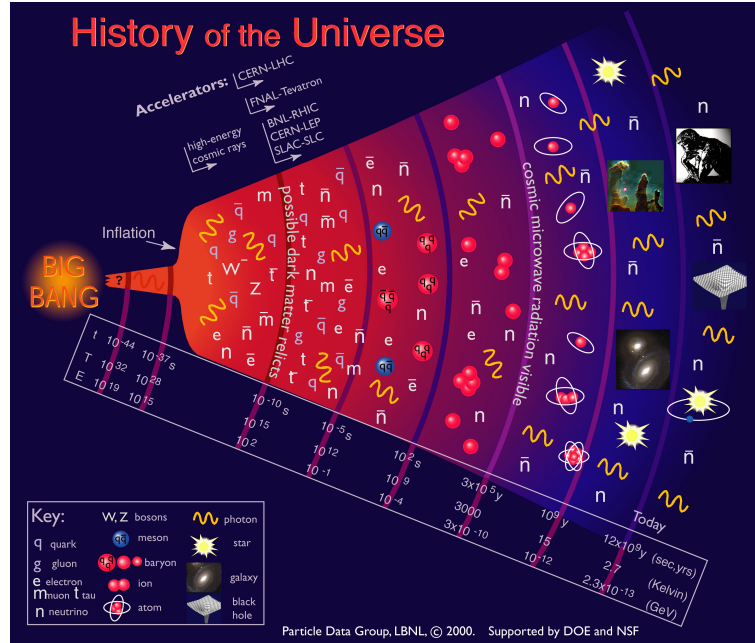
G : Gravitationskonstante, H : Hubble Konstante

Für die strahlungsdominierte Epoche ($t \lesssim 4 \times 10^{10} \text{ sec}$, $\rho \approx \rho_R$, $g_* = \text{const.}$, $\omega = \frac{1}{3}$ und $R(t) \propto t^{1/2}$) gilt:

$$H = 1,66g_*^{1/2} \frac{T^2}{m_{Pl}} \quad (9)$$

$$t = 2 \cdot H^{-1} = 0,301g_*^{-1/2} \frac{m_{Pl}}{T^2} \quad (10)$$

mit $G = m_{Pl}^2$ (m_{Pl} : Plank-Masse).



Die obige Abbildung zeigt einen Überblick über die Geschichte des Universums. Man sieht immer wieder zwischen den Epochen Phasenübergänge, wie zum Beispiel primäre Nukleosynthese. Solche Vorgänge lassen sich nicht durch gewöhnliche Thermodynamik sondern Nicht-Gleichgewichtsthermodynamik beschreiben, die im nächsten Teil behandelt wird.

3 Weggang vom Gleichgewicht

3.1 Boltzmann-Gleichung

Zur Beschreibung des Nicht-Gleichgewichtszustands benötigt man die sogenannte **Boltzmann-Gleichung** mit der Verteilungsfunktion $f(\vec{v}, \vec{x})$:

$$\hat{\mathbf{L}}f(\vec{v}, \vec{x}) = \left\{ \frac{d}{dt} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla}_v + \frac{\vec{F}}{m} \cdot \vec{\nabla}_v \right\} f(\vec{v}, \vec{x}) = \underline{\mathbf{C}}f(\vec{v}, \vec{x}) \quad (11)$$

Die linke Seite dieser Gleichung stellt die Änderung des Volumenelements im Phasenraum (*Liouville Operator*) dar und die rechte Seite Kollisionen zwischen Teilchen in diesem Volumenelement. Für die Robertson-Walker-Metrik kann dieser Ausdruck vereinfacht werden zu

$$\frac{dn}{dt} + 3H \cdot n = \frac{g}{(2\pi)^3} \int \underline{\mathbf{C}}f(\vec{v}, \vec{x}) \frac{d^3p}{E}, \quad (12)$$

wobei n die Teilchenzahl darstellt. $\left(n(t) = \frac{g}{(2\pi)^3} \int d^3p f(E, t) \right)$

Für beliebige Annihilationsprozesse ($\psi + \bar{\psi} \leftrightarrow X + \bar{X}$) hat der Kollisionsterm folgende Form:

$$\begin{aligned} \frac{g}{(2\pi)^3} \int \underline{\mathbf{C}}f(E, t) \frac{d^3p_\psi}{E_\psi} &= - \int d\pi_\psi d\pi_{\bar{\psi}} d\pi_X d\pi_{\bar{X}} (2\pi)^4 \delta(p_\psi + p_{\bar{\psi}} - p_X - p_{\bar{X}}) \\ &\quad \times |M|^2 (f_\psi f_{\bar{\psi}} - f_X f_{\bar{X}}) \end{aligned}$$

Dabei stellt die 4-dimensionale Delta-Distribution die Energieerhaltung bei der Kollision sicher. $|M|$ stellt die Kollisionswahrscheinlichkeit dar und ist proportional zum Wirkungsquerschnitt σ . Trifft man folgende drei Vereinfachungen,

1. Keine Asymmetrien zwischen ψ und $\bar{\psi}$
2. Die Annihilation $\psi + \bar{\psi} \rightarrow X + \bar{X}$ hat kein chemisches Potential
3. Die Wechselwirkung zwischen X und \bar{X} ist stärker als die zwischen ψ und $\bar{\psi}$,

so kann der Kollisionsterm weiter vereinfacht werden zu:

$$-\langle \sigma_{\psi\bar{\psi} \rightarrow X\bar{X}} |v\rangle [n_\psi^2 - (n_\psi^{EQ})^2]$$

$$-\langle \sigma_{\psi\bar{\psi} \rightarrow X\bar{X}} |v\rangle = (n_\psi^{EQ})^{-2} \int d\pi_\psi d\pi_{\bar{\psi}} d\pi_X d\pi_{\bar{X}} (2\pi)^4 \delta(p_\psi + p_{\bar{\psi}} - p_X - p_{\bar{X}}) \times |M|^2 \exp(-E_\psi) \exp(-E_{\bar{\psi}}/T)$$

Damit lautet dann die Boltzmann-Gleichung

$$\frac{dn_\psi}{dt} + 3Hn_\psi = -\langle \sigma_{\psi\bar{\psi} \rightarrow X\bar{X}} |v\rangle [n_\psi^2 - (n_\psi^{EQ})^2]. \quad (13)$$

Mit der Teilchenanzahl $Y = \frac{n_\psi}{s}$ hat Boltzmann-Gleichung folgende Form .

$$\frac{dY}{dx} = \frac{-\langle \sigma_{\psi\bar{\psi} \rightarrow X\bar{X}} |v| \rangle s}{x \cdot H(x)} (Y^2 - Y_{EQ}^2) \quad (14)$$

mit

$$x = \frac{m}{T} \quad \text{und} \quad H(x) = 1,67 g_*^{1/2} \frac{m^2}{m_{Pl}} x^{-2} \quad (\text{Hubble-Konstante})$$

Man sieht, dass im Gleichgewicht ($Y = Y_{EQ}$) die rechte Seite der Gleichung verschwindet und damit Teilchenzahl konstant bleibt.

Um die wichtige Information in der Gleichung zu verdeutlichen, wird die Gleichung durch Y_{EQ} geteilt und umgeformt.

$$\frac{x}{Y_{EQ}} \frac{dY}{dx} = -\frac{\Gamma}{H} \left[\left(\frac{Y}{Y_{EQ}} \right)^2 - 1 \right] \quad (15)$$

$$\Gamma = n_{EQ} \langle \sigma |v| \rangle \quad \text{Reaktionsrate}$$

D.h. es gilt für die relative Änderung der Teilchenanzahl $\Delta Y/Y$

$$\frac{\Delta Y}{Y} \sim \frac{x}{Y_{EQ}} \frac{dY}{dx} \sim \frac{\Gamma}{H} \quad (16)$$

Wenn der Faktor $\frac{\Gamma}{H}$ kleiner als eins ist, wird die relative Änderung der Teilchenanzahl kleiner. Man sagt die Annihilation **friert aus** und die Bedingung dafür ist $\Gamma \lesssim H$ oder $\lambda \gtrsim H^{-1}$ mit $\lambda \sim \Gamma^{-1}$ (der mittleren freien Weglänge) und H^{-1} (dem Hubble-Abstand). D.h. der Raum zwischen den Teilchen dehnt sich der Raum zwischen den Teilchen so schnell aus, dass Teilchen nicht mehr zur Kollision bzw. Annihilation kommen. Nach dem Ausfrieren der Annihilation erreichen die Teilchen das Gleichgewicht und können durch gewöhnliche Thermodynamik beschrieben werden, die im ersten Teil behandelt wurde. Die ausgefrorenen Teilchen verteilt sich im Raum als Relikte des Urknalls.

Es sind zwei Arten von Relikten zu unterscheiden.

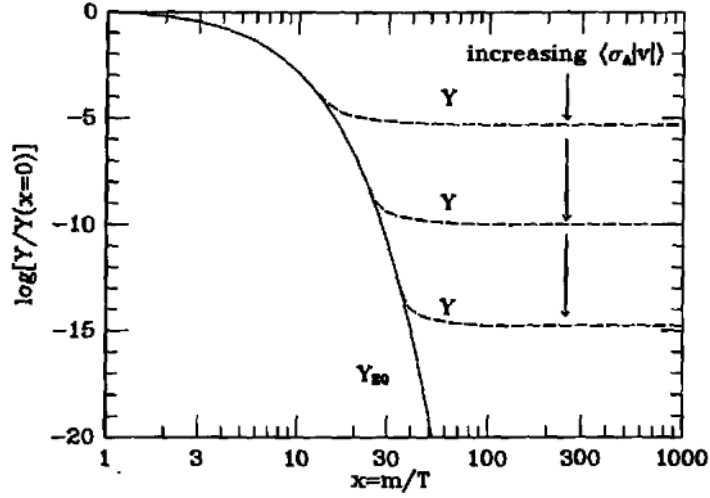
1. **Heiße Relikte** sind die Teilchen, die beim Ausfrieren der Annihilation relativistisch sind. Wie im ersten Teil gezeigt wurde (Gleichung (7)), bleibt bei solchen Teilchen die Teilchenzahl konstant. D.h. für den asymptotischen Wert der Teilchenanzahl Y_∞ kommt es nicht genau auf den Zeitpunkt des Ausfrierens an.

$$Y_\infty = Y_{EQ}(x_f) = 0,278 \frac{g_{\text{eff}}}{g_{*s}(x_f)} \quad (17)$$

x_f : x-Wert beim Ausfrieren.

Heiße Relikte sind z.B. leichte Neutrinos.

2. **Kalten Relikte** sind dagegen beim Ausfrieren nicht-relativistisch. Im Gegensatz zu heißen Relikten ist die Teilchenzahl im Gleichgewicht von der Temperatur abhängig (siehe (8)), so dass der genaue Zeitpunkt des Ausfrierens sehr wichtig ist.



Die obige Abbildung zeigt Y_{EQ} (die Teichenzahl im Gleichgewicht) der kalten Relikte (die durchgezogene Linie) und Y (die geschtrichelten Linien). Es ist leicht zu sehen, dass der Wert für Y_∞ vom genauen Wert von x_f abhängt.

Kalte Relikte sind z.B. Nukleonen.

3.2 Zwei Beispiele für die Entkopplung der Teilchen

- Entkopplung der Neutrinos

Die Reaktion der Neutrinos lautet z.B. $\bar{\nu}\nu \leftrightarrow e^+e^-$ oder $\nu e \leftrightarrow \nu e$ usw. Für solche Prozesse mit der schwachen Wechselwirkung ist der Wirkungsquerschnitt gegeben durch $\sigma \simeq G_F^2 T^2$ mit der Fermi-Konstante G_F . Nach Gleichung (2) ist die Teilchendichte n proportional zu T^3 . So ergibt sich dann

$$\Gamma = n\sigma|v| \simeq G_F^2 T^5. \quad (18)$$

Mit Hilfe von Gleichung (9) lässt sich das Verhältnis zwischen Γ und H berechnen

$$\frac{\Gamma}{H} \simeq \frac{G_F^2 T^5}{T^2/m_{Pl}} \simeq \left(\frac{T}{1\text{MeV}} \right)^3 \quad (19)$$

Neutrinos frieren in der Größenordnung 1 MeV aus. Dies entspricht $t \simeq 50$ ms und $T \simeq 10^{10}$ K. Die Teilchendichte der Neutrinos heute ist gegeben durch

$$n = s_0 \cdot Y_\infty = 2970 Y_\infty = 825 \cdot \frac{g_{\text{eff}}}{g_*(x_f)} \text{ cm}^{-3} \quad (20)$$

$$\simeq 400 \text{ cm}^{-3} \quad (21)$$

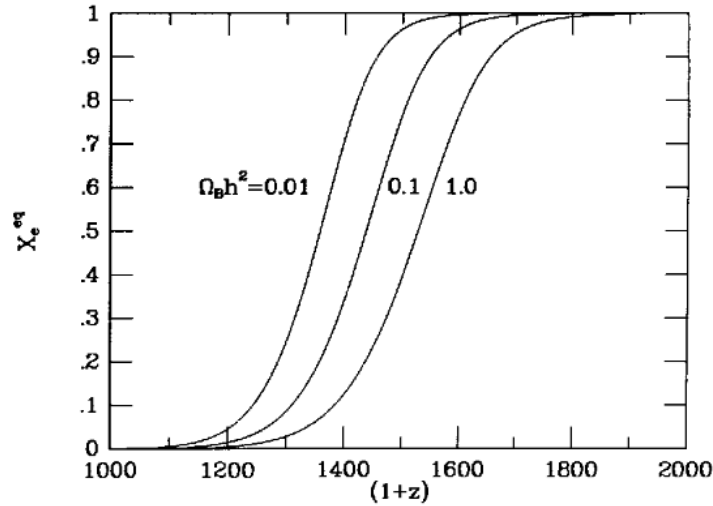
- **Rekombination und die Entkopplung der Photonen**

Nach ca. 300.000 Jahre ist die Temperatur des Universum so weit gesunken, dass Nukleonen Elektronen einfangen und Wasserstoff-Atome bilden. Dieser Prozess wird als **Rekombination** bezeichnet. Die Ionisationsrate im Gleichgewicht $X_e^{EQ} = n_p^{EQ}/n_B^{EQ}$ ist durch so genannte Saha-Gleichung gegeben.

$$\frac{1 - X_e^{EQ}}{(X_e^{EQ})^2} = \frac{4\sqrt{2}\zeta(3)}{\sqrt{\pi}} \eta \left(\frac{T}{m_e} \right)^{3/2} \exp(B/T) \quad (22)$$

B : Bindungsenergie des H-Atoms, n_p^{EQ} : Protonendichte im Gleichgewicht, n_B^{EQ} : Baryonendichte im Gleichgewicht.

Die Lösung dieser Gleichung wird in folgender Abbildung graphisch dargestellt.



In der Abbildung wird auf der x-Achse die Rotverschiebung $(1+z)$ aufgetragen. Der Kurvenverlauf ist von $\Omega_B \cdot h^2$ abhängig.

Definiert man als Zeitpunkt der Rekombination $X_e^{EQ} = 10\%$, so kann folgende Rotverschiebung abgelesen werden.

$$(1 + z_{\text{rec}}) \approx 1300$$

Die Temperatur und die Zeit bei der Rekombination sind dann gegeben durch:

$$T_{\text{rek}} = T_0(1 + z_{\text{rek}}) = 3575 \text{ K} = 0,308 \text{ eV} \quad (23)$$

$$t_{\text{rek}} = \frac{2}{3} H_0^{-1} \Omega^{-1/2} (1 + z_{\text{rek}})^{-1/2} \text{ sec} \quad (24)$$

$$\approx 200000 - 300000 \text{ Jahre} \quad (25)$$

Nach der Rekombination können sich die Photonen stoßfrei im Raum ausbreiten, d.h. das Universum wird zu diesem Zeitpunkt durchsichtig. Diese Photonen haben sich inzwischen durch Rotverschiebung auf eine Temperatur von 2,75 K abgekühlt. Diese tatsächlich beobachtbare Hintergrundstrahlung gilt als eine der wichtigsten Evidenzen für die Urknall-Theorie.