

Westfälische Wilhelms-Universität Münster
Fachbereich Physik
WS 08/09
Seminar: Kosmologie

Phasenübergänge im frühen Universum

Vortrag von Samantha Dooling

1 Einleitung

Phasenübergänge sind allgemein bekannt. Bei einer Temperatur von $T = 0^\circ\text{C}$ gefriert Wasser. Es hat also ein PÜ von der flüssigen zur festen Phase stattgefunden. Ein weiteres Beispiel ist der Ferromagnet, der bei Temperaturen überhalb der Curie-Temperatur seine ferromagnetischen Eigenschaften verliert. Es existieren also bestimmte Variablen, die in kritischen Bereichen eine Änderung der Phase bewirken. Im frühen Universum sind PÜ mit spontaner Symmetriebrechung sehr wichtig. Da, durch diese die Fermionen und Bosonen ihre Masse erhalten.

Im folgenden wird erst auf die allgemeinen Grundlagen von PÜ eingegangen und im Anschluss PÜ mit spontaner Symmetriebrechung und der Wiederherstellung der Symmetrie besprochen. Dann wird der elektroschwache PÜ diskutiert, der den Fermionen und den Bosonen ihre Masse zuordnet. Zum Schluss werden noch zwei topologische Defekte besprochen, welche man als Überbleibsel des elektroschwachen PÜ im Universum entdecken könnte.

2 Phasenübergänge

Phasenübergänge sind definiert über die thermodynamischen Potentiale. Es gilt für den Phasenübergang 1. Ordnung, dass die freie Enthalpie G stetig ist, aber ihre Ableitungen nach den natürlichen Variablen unstetig sind. Für den Phasenübergang 2. Ordnung gilt, dass die freie Enthalpie G stetig ist sowie ihre ersten Ableitungen nach den natürlichen Variablen, doch die zweiten Ableitungen sind unstetig.

Die Ehrenfestsche Klassifikation ist die Definition des Phasenübergangs in n -ter Ordnung. Wir betrachten aber hier nur die 1. und 2. Ordnung.

2.1 PÜ₁ am fluiden und magnetischen System

Beim fluiden System sind die natürlichen Variablen der Druck p und die Temperatur T . Somit ergeben sich die ersten Ableitungen von G nach T und p zu:

$$\left(\frac{\partial G}{\partial p}\right)_T = V(T, p) \quad \left(\frac{\partial G}{\partial T}\right)_p = -S(T, p)$$

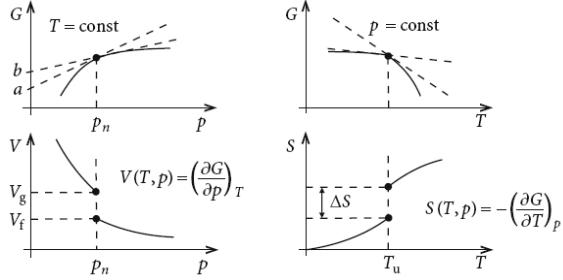


Abbildung 1: die freie Enthalpie beim fluiden System und ihre Ableitungen

Auf der linken Seite in Abb. 1 ist die freie Enthalpie in Abhängigkeit des Drucks dargestellt und darunter die Ableitung nach p . G ist zwar stetig, aber nicht diffbar in p_n . Die Ableitung macht dort einen Sprung ΔV . Auf der rechten Seite von Abb. 1 ist die freie Enthalpie in Abhängigkeit der Temperatur aufgetragen, bei konstantem Druck. $(\frac{\partial G}{\partial T})_p$ macht einen Sprung im kritischen Punkt, d.h. die Entropie ist dort nicht stetig. Dies lässt sich erkären, durch die Wärmeumwandlung, die benötigt wird, um die Teilchenbindungen aufzubrechen beim Übergang von der festen in die flüssigen Phase.

Betrachten wir nun das Phasendiagramm von Wasser (Abb.2).

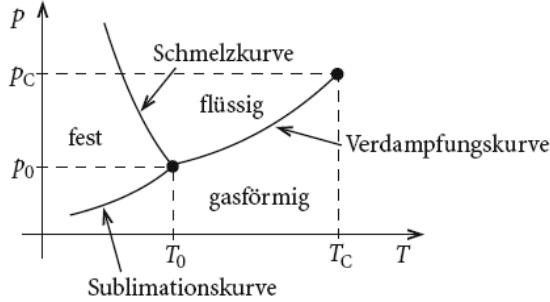


Abbildung 2: Das Phasendiagramm von Wasser

Der PÜ von der flüssigen in die gasförmige Phase kann nur erreicht werden durch überschreiten der Dampfdruckkurve. Die Steigung der Dampfdruckkurve wird beschrieben durch die Clausius - Clayperon - Gleichung:

$$\frac{dp}{dT} = \frac{s_g - s_f}{v_g - v_f}$$

wobei $s_{g,f}$ die Entropie pro mol in der gasförmigen und flüssigen Phase, sowie $v_{g,f}$ das Molvolumen für beide Phasen ist. Die Clausius - Clayperon - Gleichung ist wiederum nur sinnvoll wenn:

$$s_g \neq s_f \text{ und } v_g \neq v_f$$

Die Entropie und das Volumen waren aber bei einem fluiden System gerade die 1. Ableitungen nach den natürlichen Variablen. Also können wir aus der Unstetigkeit der Entropie und des Volumens an der Dampfdruckkurve schließen, dass dort ein PÜ₁ stattfindet. Bei einer Temperatur von $T = T_C$, also der Grenze der Dampfdruckkurve ist der PÜ nicht mehr von 1. Ordnung sondern von 2. Bei einer Temperatur oberhalb der kritischen Temperatur kann man nicht mehr die flüssige von der gasförmigen Phase unterscheiden. Hier ist ein PÜ nur durch einen cross over möglich.

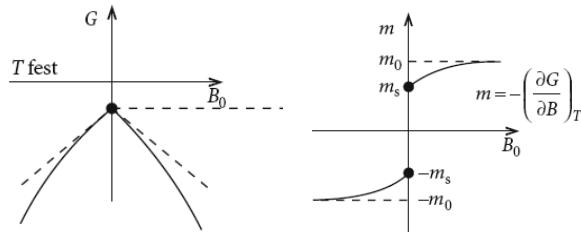


Abbildung 3: die freie Enthalpie beim magnetischen System und ihre Ableitung

Betrachten wir nun den PÜ₁ am magnetischen System. Die natürlichen Variablen sind die Temperatur T und die Magnetische Induktion B_0 . In Abb. 3 ist die freie Enthalpie nach B_0 aufgetragen und daneben die Ableitung nach B_0 : $\left(\frac{\partial G}{\partial B_0}\right)_T = -m$. Die freie Enthalpie hat bei $B_0 = 0$ einen Knick, und die Magnetisierung macht dort einen Sprung von $-m_s$ nach m_s . Die Magnetisierung bleibt also vom Betrag her gleich wechselt aber das Vorzeichen.

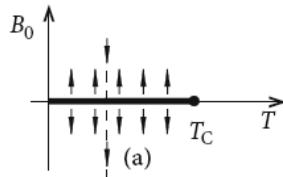


Abbildung 4: Das Phasendiagramm beim magnetischen System

Bei Betrachtung des Phasendiagramms in Abb. 4 fällt auf, dass für $T < T_C$ ein PÜ existiert. Beim Überschreiten der Phasengrenze bei $B_0 = 0$ ändert die

Magnetisierung, hier durch die Pfeile dargestellt, das Vorzeichen, aber bleibt vom Betrag her gleich.

2.2 PÜ₂ am fluiden System

Bei einem PÜ zweiter Ordnung betrachten wir die zweiten Ableitungen von G nach den natürlichen Variablen:

$$\begin{aligned} c_p &= -T \left(\frac{\partial^2 G}{\partial T^2} \right)_p \text{ Wärmekapazität} \\ \kappa_T &= \frac{-1}{V} \left(\frac{\partial^2 G}{\partial p^2} \right)_T \text{ Kompressibilität} \\ \beta &= \frac{1}{V} \left(\frac{\partial^2 G}{\partial T \partial p} \right) \text{ thermischer Ausdehnungskoeffizient} \end{aligned}$$

Diese drei Gleichungen müssen nach der Definition des PÜ₂ unstetig sein am Umwandlungspunkt. Die Phasengrenzkurve ist festgelegt durch die Ehrenfestgleichung. Diese wird aus der Annahme hergeleitet, dass die Entropie und das Volumen an der Phasengrenze gleich sind. Es wird also angenommen, dass die ersten Ableitungen von G nach T und p stetig sind. Man erhält dann zur Beschreibung der Phasengrenzkurve die Ehrenfestgleichung:

$$\frac{dp}{dT} = \frac{1}{TV} \frac{c_p^{(1)} - c_p^{(2)}}{\beta^{(1)} - \beta^{(2)}} = \frac{\beta^{(1)} - \beta^{(2)}}{\kappa^{(1)} - \kappa^{(2)}}$$

wobei (1) und (2) jeweils, die Parameter in der 1. und 2. Phase beschreiben sollen. Diese Gleichung ist nur sinnvoll, wenn die Wärmekapazität, sowie die Kompressibilität und der thermische Ausdehnungskoeffizient in der ersten und zweiten Phase nicht gleich sind. Es existiert ein Phasenübergang zweiter Ordnung, da die zweiten Ableitungen von G nicht stetig sind an der Phasengrenzkurve.

2.3 Begriffe

Kommen wir nun zu nennenswerten Begriffen, die man im Bezug auf Phasenübergänge schonmal gehört haben sollte.

Ordnungsparameter:

Der Ordnungsparameter ist eine Größe, die eine Phase charakterisiert und sich somit von allen anderen Phasen unterscheidet. Zum Beispiel, die spontane Magnetisierung beim Ferromagneten. Für Temperaturen kleiner der Curie Temperatur hat der Ferromagnet ein spontanes magnetisches Moment, d.h. er magnetisiert ohne ein äußeres Feld. Doch oberhalb der Curie Temperatur verliert er die magnetische Eigenschaft und ist nur noch paramagnetisch, d.h. er wird im äußeren Feld magnetisiert, verstärkt es aber nur schwach.

Korrelationsfunktion:

Die Korrelationsfunktion ist ein Maß für die Korrelation zwischen zwei Orten bezüglich einer physikalischen Eigenschaft X mit der Dichte am Ort $\vec{r} x(\vec{r})$:

$$g(\vec{r}, \vec{r}') = \langle x(\vec{r})x(\vec{r}') \rangle - \langle x(\vec{r}) \rangle \langle x(\vec{r}') \rangle$$

Korrelationslänge:
Die Korrelationslänge ist ein Maß für die Reichweite der Korrelation: $\xi(T)$

3 Spontane Symmetriebrechung SSB

Um nun die SSB zu beschreiben müssen wir die QFT benutzen. Felder werden nun durch Lagragedichten beschrieben. Die Massenterme in den Lagragedichten sind aber nicht eichvariant. Das führt zu einem Problem, da die Fermionen und Bosonen durch PÜ mit SSB ihre Masse erhalten. Zur Lösung dieses Problems benutzen wir das Higgs Feld. Das Higgs Feld ist ein skalares Feld und beschreibt den symmetrischen Zustand des Universums. Beim Abkühlen des Universums wird die Symmetrie zwischen den Wechselwirkungen gebrochen, da die Austauschteilchen der schwachen WW durch den Higgs Mechanismus eine Masse erhalten. Dies nennt man auch den elektroschwachen PÜ, den wir später genauer besprechen werden.

Klassisch ist die Lagragedichte eines skalaren Feldes gegeben durch:

$$L = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - V(\phi) \quad \text{wobei} \quad V(\phi) = -\frac{1}{2} m^2 \phi^2 + \frac{1}{4} \lambda \phi^4$$

Für den Vakuumerwartungswert ergibt sich:

$$\phi = 0 \quad \phi = \pm \sqrt{\frac{m^2}{\lambda}} = \sigma_\pm$$

Das Maximum des Potentials liegt bei $\phi = 0$ und die Minima bei σ_\pm , welche die günstigsten Energiezustände sind, also die Grundzustände, siehe Abb.5.

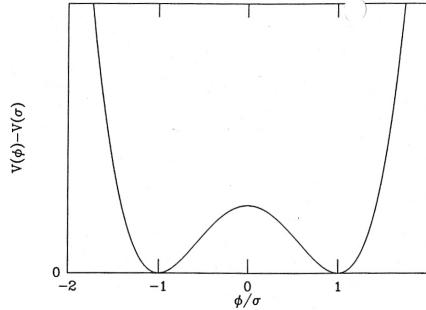


Abbildung 5: Das Potential bei der SSB

Es existieren stabile und instabile Extremstellen. Die Natur möchte den günstigsten Energiezustand annehmen und muss sich nun für einen der beiden entarteten Zustände entscheiden. Dieser Grundzustand hält die Symmetrie des Potentials nicht ein und somit auch nicht die Symmetrie der Lagragedichte. Diesen Vorgang nennt man spontane Symmetriebrechung.

4 Wiederherstellung der Symmetrie

Um die Symmetrie wieder herzustellen muss $\phi = 0$ zu einem stabilen Grundzustand gemacht werden. Wir gehen wieder von unserem Potential aus: $V(\phi) = \frac{\lambda}{4}(\phi^2 - \sigma^2)^2$. Es ist außerdem wichtig zu wissen, dass wir die Masse eines Teilchens aus der Krümmung des Potential beim VEW erhalten:

$$m^2 = V''(\phi = 0) = -\lambda\sigma^2$$

Wenn m imaginär ist sind die Lösungen für ϕ exponentiell fallenende Funktionen. Betrachtet man nun das Feld im Kontakt mit einem Wärmebad, wird der exponentielle Verlauf gedämpft. Diesen Effekt können wir durch eine zusätzliche Masse realisieren die wir m_{Plasma} nennen:

$$m_{Plasma}^2 = a\lambda T^2$$

Bei endlichem T erhalten wir dann die effektive Masse:

$$m_T^2 = -\lambda\sigma^2 + m_{Plasma}^2$$

Für einen Übergang vom instabilen Zustand bei $\phi = \sigma$ in den stabilen Zustand bei $\phi = 0$ in Abhängigkeit von T , erhalten gilt:

$$\begin{aligned} m_T^2 < 0 &\Rightarrow \phi = 0 : \text{instabiler Grundzustand} \\ m_T^2 > 0 &\Rightarrow \phi = 0 : \text{stabiler Grundzustand} \end{aligned}$$

Die kritische Temperatur bei der der PÜ stattfindet ist $T_C \approx \frac{\sigma}{\sqrt{a}}$. Für $T \geq T_C$ liegt bei $\phi = 0$ ein stabiles Minimum vor, welcher dem VEW entspricht. Somit ist die Symmetrie wieder hergestellt.

Da wir die Felder korrigiert haben, müssen wir auch Quantenkorrekturen höherer Ordnung, aufgrund der Quantenfluktuationen, mit einbeziehen. Es ergibt sich das Einschleifenpotential zu:

$$V_T(\phi_c) = V(\phi_c) + \frac{T^4}{2\pi^2} \int_0^\infty dx x^2 \ln[1 - \exp(-(x^2 + \frac{M^2}{T^2})^{1/2})]$$

mit dem Einschleifenpotential bei $T = 0$:

$$V(\phi_c) = -\frac{1}{2}m^2\phi_c^2 + \frac{1}{4}\lambda\phi_c^4 + \frac{1}{64\pi^2}M^2 \ln\left(\frac{M^2}{\mu^2}\right)$$

$$\text{und } M^2(\phi_c) = -m^2 + 3\lambda\phi_c^2$$

Für hohe Temperaturen lässt es sich entwickeln zu:

$$V_T(\phi_c) = V(\phi_c) + \frac{\lambda}{8}T^2\phi_c^2 - \frac{\pi^2}{90}T^4 + \dots$$

Für $T \geq T_C$, wobei die kritische Temperatur durch $T_C \approx \frac{2m}{\lambda}$ gegeben ist, befindet sich bei $\phi_c = 0$ ein globales Minimum. Die Symmetrie ist wieder hergestellt, solange sich bei $\phi_c = 0$ der Grundzustand befindet.

5 PÜ bei der Symmetriebrechung

Nun diskutieren wir welche PÜ es bei SSB geben kann. Dazu betrachten wir Abb. 6. Dort ist der Verlauf des Potential für verschiedenen Temperaturen dargestellt. Die Änderung des Verlauf des Potentials von $T \gg T_C$ bis $T = 0$ beschreibt einen PÜ₁. Ohne die beiden Kurven $T = T_1$ und $T = T_C$ handelt es sich um einen PÜ₂. Die Unterschiede der Potentialänderungen für PÜ 1. und 2. Ordnung liegt in der Ausbildung einer Barriere zwischen den zwei entarteten Minima. Bei einem PÜ₂ geht das Minimum bei $\phi_c = 0$ kontinuierlich in den Grundzustand bei $\phi_c \neq 0$ über. Bei einem PÜ₁ bildet sich bei $T = T_C$ eine Potentialbarriere zwischen den entarteten Minima. Der Übergang von einem Minimum in das andere weist dann eine Diskontinuität auf. Der Übergang kann durch Tunnellen stattfinden. Diesen Tunnelvorgang kann man sich folgendermaßen vorstellen: Bläschen einer neuen stabilen Phase bilden sich und breiten sich mit annähernd Lichtgeschwindigkeit aus, bis sie die alte Phase vollständig eingenommen haben.

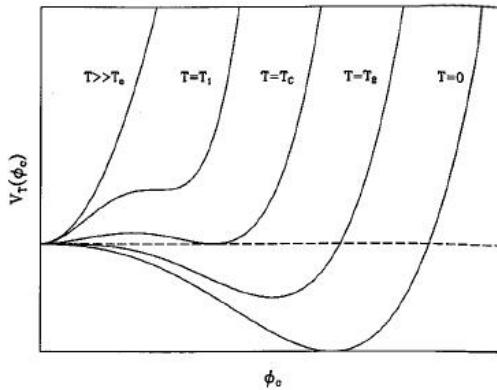


Abbildung 6: Verlauf des Potential für verschiedene Temperaturen

6 Die elektroschwache Symmetriebrechung

Kommen wir nun zu einem konkreten PÜ der im frühen Universum stattgefunden hat: Die elektroschwache Symmetriebrechung. Da sich das Universum nach dem Urknall abgekühlt hat, ist es nicht im symmetrischen Zustand geblieben. Die elektromagnetische und schwache WW sind nicht mehr symmetrisch, da die Austauschteilchen der schwachen WW nun eine Masse besitzen. Wir gehen wieder von dem Potential aus 3. aus, doch zusätzlich treten noch Terme im effektiven Einschleifenpotential für $T = 0$ auf, aufgrund der Higgs-Kopplung mit den Eichbosonen und Fermionen:

$$V(\phi_c) = -\frac{1}{2}m^2\phi_c^2 + \frac{1}{4}\lambda\phi_c^4$$

Skalara Loops

$$+\frac{1}{64\pi^2}(-m^2+3\lambda\phi_c^2)^2\ln\left(\frac{-m^2+3\lambda\phi_c^2}{\mu^2}\right)$$

Eichbosonen

$$\frac{+3}{1024\pi^2}\left[2g^4+(g^2+g'^2)^2\right]\phi_c^4\ln\left(\frac{\phi_c^2}{\mu^2}\right)$$

Fermionen

$$-\frac{3}{64\pi^2}h_t^4\phi_c^4\ln\left(\frac{\phi_c^2}{\mu^2}\right)$$

Dabei sind g und g' die Eichkopplungskonstanten aus der Masse der W- und Z-Bosonen und h_t ist die Yukawa Kopplungskonstante, aufgrund der Fermionen WW mit dem skalaren Feld. Um das Potential etwas zu vereinfachen betrachten wir nun kleine Higgsmassen, d.h. $M \leq 100\text{GeV}$, auSSerdem vernachlässigen wir die skalaren Loops. Somit erhalten wir:

$$V(\phi_c) = -\frac{1}{2}(2B+\lambda)\sigma^2\phi_c^2 + \frac{1}{4}\lambda\phi_c^4 + B\phi_c^4\ln\left(\frac{\phi_c^2}{\sigma^2}\right)$$

Der Anteil der Fermionen und Bosonen wurde in dem Term B zusammengefasst.

Die Higgsmasse berechnet sich nun aus der Krümmung des Potentials beim VEW:

$$\begin{aligned} V'(\sigma) &= 0 \\ M^2 = V''(\sigma) &= 2(\lambda+6B)\sigma^2 \end{aligned}$$

In Abb. 7 sieht man das effektive Einschleifen-Higgs-Potential bei $T=0$ für verschiedene Verhältnisse der Higgsmasse und der Coleman-Weinberg-Masse $M_{CW} = \sqrt{8B}\sigma$.

Um den Ablauf des PÜ zu beschreiben, betrachten wir $V_T(\phi_c)$ bei endlichen T :

$$V_T(\phi_c) = V(\phi_c) + \frac{T^2}{2\pi^2}\left[6F_+\left(g^2\phi_c^2/4\right) + 3F_+\left((g^2+g'^2)\phi_c^2/4\right) + F_-\left(h_t^2\phi_c^2/2\right)\right]$$

Dabei sind F_{\pm} Funktionale bzgl. der Fermionen(-)- und Bosonen(+)-Loops. Aus Kosmologischen Überlegungen, Diskussion des elektroschwachen PÜ für verschiedenen Higgsmassen und experimentellen Befunden der Masse des Higgs Teilchens, lässt sich darauf schließen, dass der PÜ der elektroschwachen Symmetriebrechung ein cross over war.

Zusammenfassung:

Das Weltall befand sich kurz nach dem Urknall in einem Zustand sehr hoher Dichte und sehr hoher Temperatur: $T \gg T_C$. Das war der Zustand der totalen Symmetrie, denn die Wechselwirkungen waren alle symmetrisch. Durch das langsame Abkühlen des Universums kam es bei $T \approx 10^{14} - 10^{15}\text{GeV}$ zu der

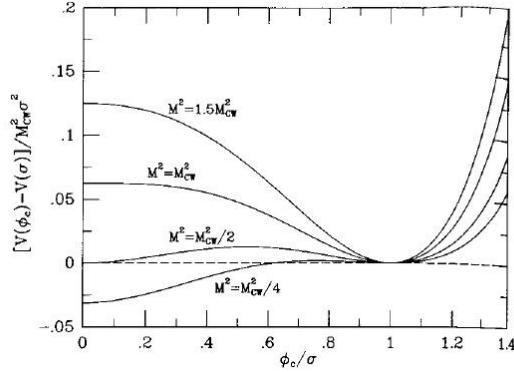


Abbildung 7: eff. Einschleifenpotential bei $T=0$ für verschiedene Higgsmasse im Vergleich mit der Coleman-Weinberg-Masse

Bildung eines skalaren Feldes, welches die Symmetrie zwischen der elektroschwachen und starker WW gebrochen hat. Bei $T \approx 200\text{GeV}$ kam es zur Symmetriebrechung zwischen der elektromagnetischen und schwachen Wechselwirkung und bei $T \approx 100\text{MeV}$ wurde die chirale Invarianz der starken Wechselwirkung gebrochen, es kam zum Confinement.

7 Topologische Defekte

Topologische Defekte treten auf bei Phasenübergängen mit spontaner Symmetriebrechung. Im Inneren bleibt die Symmetrie erhalten, wo hingegen außerhalb der top. Defekte die Symmetrie gebrochen wurde. Wir wollen nun Spuren von spontaner Symmetriebrechung im Universum untersuchen, also „Rückstände des alten Vakuums“. Es existieren eine Vielzahl von topologischen Defekten, wir betrachten hier zwei: die Domain Walls und die kosmischen Strings.

7.1 Domain Walls

Ausgehend von einem symmetrischen Potential mit zwei entarteten Minima, kann man sich vorstellen, dass die Phasenübergänge in den beiden Bereichen zu einem bestimmten Zeitpunkt völlig unabhängig voneinander verlaufen. Es entstehen also zwei Domänen mit unterschiedlichen skalaren Felder. In Abb. 7 sind diese skalaren Felder mit + bzw. - gekennzeichnet.

Die beiden Bereiche werden durch die sogennannten Domain Walls getrennt. Solch ein topologischer Defekt entsteht meist in Netzstrukturen wie es in Abb. 7 dargestellt ist. Innerhalb der Domänen bildet sich also ein skalares Feld aus, bei der die Symmetrie gebrochen ist, während die Domain Walls selbst den symmetrischen Zustand darstellen. Gebiete mit dem gleichen skalaren Feld, al-

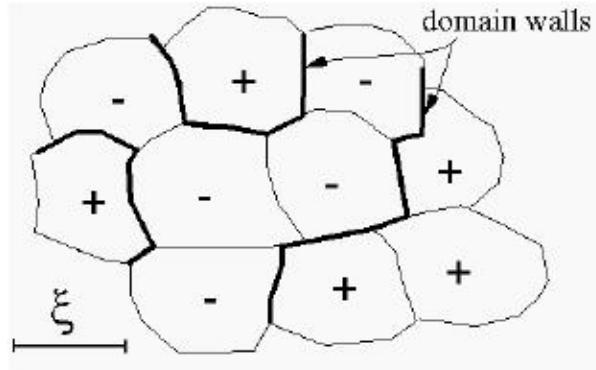


Abbildung 8: Netzwerk aus Domain Walls

so in denen der Phasenübergang gleich stattgefunden hat, werden nicht durch Domain Walls getrennt. Falls der Abstand zweier Gebiete größer ist als die Korrelationslänge, dann sind sie unkorreliert. Sie haben also keine Auswirkungen aufeinander.

7.2 Kosmische Strings

Während der Abkühlung des Universums haben die Phasenübergänge nicht alle gleichzeitig und völlig äquivalent stattgefunden, sondern in getrennten Gebieten unabhängig voneinander. Wenn nun diese Gebiete mit unterschiedlichen Feldzuständen aufeinandertreffen, entstehen als Grenzen zwischen ihnen die kosmischen Strings. Zur Vorstellung wiegt ein 1 cm eines K-Strings ungefähr 10 Billionen Tonnen. Stellt man sich vor, ein Wasserstoffatom sei so groß wie die Sonne, dann wäre eine K-String nicht dicker als ein Menschenhaar. Diese „Fäden“ haben ein sehr großes Gravitationsfeld, sind aber so dünn, dass sie zwar schon theoretisch bekannt sind, aber noch nicht experimentell bewiesen.

