Friedmann-Robertson-Walker-Metrik und Friedmann-Gleichung

Anja Teuber

Münster, 29. Oktober 2008

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Mithilfe der Einstein'schen Feldgleichungen der Allgemeinen Relativitätstheorie und einer einfachen Metrik, der Friedmann-Robertson-Walker-Metrik, können - basierend auf dem kosmologischen Prinzip - bereits viele Zusammenhänge zwischen wichtigen kosmologischen Größen hergeleitet werden. Anhand mehrerer Beispiele soll demonstriert werden, wie aus bereits wenigen Beobachtungsgrößen Aussagen über den Zustand, die Vergangenheit und die weitere Entwicklung des Universums sowie dessen Gestalt, Energiedichte und Alter gemacht werden können.

2 Allgemeine Relativitätstheorie und die Einstein'schen Feldgleichungen

Die Allgemeine Relativitätstheorie (ART) wurde in den Jahren 1907 bis 1916 von Albert Einstein entwickelt. Die Gravitation wird hier als Krümmung der Raumzeit, also als geometrisches Phänomen, aufgefasst. Die Krümmung wird durch alle Formen von Energie, insbesondere Masse, hervorgerufen. Ein experimenteller Nachweis der ART kann z.B. über den sog. Gravitationslinsen-Effekt erfolgen.

2.1 Das Äquivalenzprinzip

Das Äquivalenzprinzip bildet die Grundlage der ART.

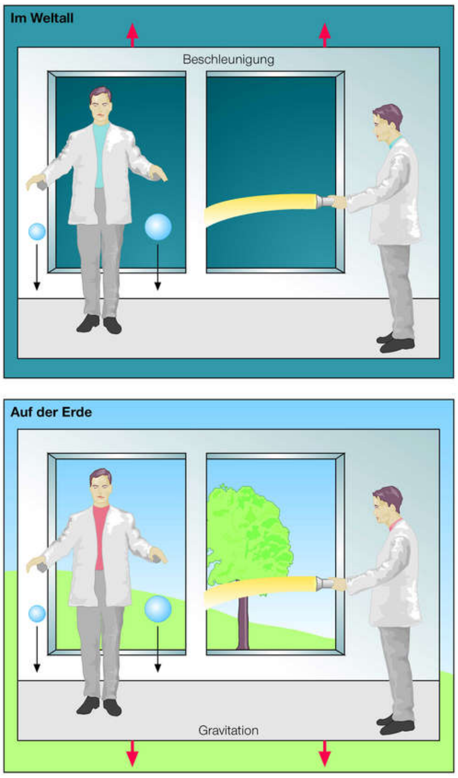

Abbildung 1: Verdeutlichung des Äquivalenz-Prinzips

Es kann durch den Vergleich eines gleichmäßig beschleunigten Bezugssystems mit einem ruhenden, in dem lediglich die Gravitationskraft wirkt, verstanden werden (vgl. Abbildung 1).

Im gleichmäßig beschleunigten Bezugssystem (Abb. 1 oben) erfährt der Ball von außen betrachtet keine Beschleunigung. Im Koordinatensystem des Zimmers wirkt jedoch eine Scheinkraft $\vec{F}_S$, die proportional zur trägen Masse m_t des Balls ist

$$\vec{F}_S = -m_t \cdot \vec{a} \tag{1}$$

wobei $\vec{a}$ die Beschleunigung beschreibt.
Im homogenen (statischen) Schwerefeld (Abb. 1 unten) wirkt die Gravitationskraft $\vec{F}_G$ auf den Ball, die proportional zu seiner schweren Masse m_s ist:

$$\vec{F}_G = m_s \cdot \vec{g} \overset{!}{=} m_t \cdot \vec{a} \tag{2}$$

Nach dem zweiten Newton'schen Axiom ist diese Kraft gerade die träge Masse des Balls multipliziert mit seiner Beschleunigung $\vec{a}$. Experimente liefern nun $\vec{a} = \vec{g}$ und daher folgt die Gleichheit von träger und schwerer Masse

$$m_t = m_s \tag{3}$$

für jeden Körper. Anders formuliert besagt das Äquivalenzprinzip:

> Die Bewegung in einem beschleunigten Bezugssystem ist äquivalent zu einer Bewegung im homogenen (statischen) Schwerefeld.

2.2 Der Riemann'sche Raum

In der Speziellen Relativitätstheorie wird das Abstandsquadrat zweier Ereignisse in der Raumzeit mithilfe der sog. Minkowski-Metrik beschrieben

$$(\mathrm{d}s)^2 = \eta_{\mu\nu}\mathrm{d}x^\mu \mathrm{d}x^\nu \tag{4}$$

wobei

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{5}$$

der ortsunabhängige metrische Tensor ist.

In der ART wird ein Gravitationsfeld mit einer ortsabhängigen Metrix $g_{\mu\nu}(x)$ identifiziert, die im Allg. nicht euklidisch und nicht notwendig äquivalent zur Minkowski-Metrik ist. Daraus resultieren nichtlineare Koordinatenachsen, die als Krümmung des Raumes interpretiert werden. Die Winkelsumme im Dreieck ist jetzt allgemein ungleich 180° und die kürzeste Verbindung zwischen zwei Punkten ist eine Geodäte.
Die Mathematik der ART nutzt den sog. Riemann'schen Raum mit der Metrik

$$(\mathrm{d}s)^2 = g_{\mu\nu}(x)\,\mathrm{d}x^\mu \mathrm{d}x^\nu \tag{6}$$

Dieser stellt eine Beschreibung einer gekrümmten Hyperfläche im höherdimensionalen kartesischen Raum dar. Im Zweidimensionalen z.B. stellt eine Kugeloberfläche eine gekrümmte Hyperfläche im dreidimensionalen kartesischen Raum dar.

Als Maß für die Krümmung wird der Riemann'sche Krümmungstensor

$$R^{\mu}_{\nu\alpha\beta} = \partial_\alpha \Gamma^{\mu}_{\nu\beta} - \partial_\beta \Gamma^{\mu}_{\nu\alpha} + \Gamma^{\mu}_{\sigma\alpha}\Gamma^{\sigma}_{\nu\beta} - \Gamma^{\mu}_{\sigma\beta}\Gamma^{\sigma}_{\nu\alpha} \tag{7}$$

mit den Christoffel-Symbolen

$$\Gamma^{\nu}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} g^{\mu\sigma} \left(\partial_\beta g_{\sigma\alpha} + \partial_\alpha g_{\sigma\beta} - \partial_\sigma g_{\alpha\beta} \right) \tag{8}$$

eingeführt. Die Definition ist so gewählt, dass $R^{\mu}_{\nu\alpha\beta} = 0$ einer flachen Hyperfläche entspricht. Desweiteren wird der Ricci-Tensor

$$R_{\nu\beta} = R^{\mu}_{\nu\mu\beta} \tag{9}$$

und der Ricci-Skalar

$$\mathcal{R} = g^{\nu\beta} R_{\nu\beta} \tag{10}$$

definiert.

2.3 Skizze der Herleitung der Einstein'schen Feldgleichungen

Nun soll aus einer gegebenen Energie (Masse, Strahlung, Druck usw.) das Gravitationsfeld bzw. die Raumzeitkrümmung bestimmt werden. Als Quelle des Gravitationsfeldes wird der Energie-Impuls-Tensor $T_{\mu\nu}$ verwendet, der die Energiedichte, die Energie-Strom-Dichte und den Spannungstensor enthält.
Als Ansatz für das Gravitationsfeld $G_{\mu\nu}$ wird

$$G_{\mu\nu} = \kappa \cdot T_{\mu\nu} \tag{11}$$

mit einer Proportionalitätskonstanten κ gewählt, da $G_{\mu\nu} = 0$ bei flacher Raumzeit ($T_{\mu\nu} = 0$) gelten soll. Desweiteren werden verschiedene Forderungen an das Gravitationsfeld gestellt: Da der Energie-Impuls-Tensor ein symmetrischer Tensor zweiter Stufe ist, soll dies auch für das Gravitationsfeld gelten; es soll Energie- und Impulserhaltung gelten, d.h. $\nabla T_{\mu\nu} = 0$ und somit $\nabla G_{\mu\nu} = 0$; da das Gravitationsfeld die Beschaffenheit der Raumzeit widerspiegeln soll, wird es als Kombination aus dem metrischen Tensor uns seinen ersten und zweiten Ableitungen (also dem Krümmungstensor) gebildet.
Es folgen schließlich die Einstein'schen Feldgleichungen

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu}\mathcal{R} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} \tag{12}$$

mit der kosmologischen Konstanten

$$\Lambda = \frac{8\pi G}{c^4} \rho_{vac} \tag{13}$$

der Gravitationskonstanten G, der Lichtgeschwindigkeit c und der Vakuumenergiedichte ρ_{vac}.

Die kosmologische Konstante Λ wurde von Einstein eingeführt, um ein statisches Universum als Lösung der Einstein'schen Feldgleichungen zuzulassen. Nach der experimentellen Entdeckung der Expansion war sie schließlich ledlich von akademischem Interesse z.B. bei der Suche nach einer vereinheitlichten Theorie. Sie wurde unter anderem im Rahmen von Vakuumfluktuationen der Quantenfeldtheorien interpretiert, jedoch liegen die daraus vorhergesagten Werte um Größenordnungen neben den Messwerten. Außerdem spielt die kosmologische Konstante eine entscheidende

Rolle in der Inflationstheorie: Wenn Λ in den Einstein'schen Feldgleichungen dominiert, kommt es zu einer exponentiellen Expansion des Universums (Inflation).

Nachdem Λ lange als null galt, wird ihr nun ein kleiner positiver Wert zugeschrieben. Die kosmologische Konstante wird als zeitlich konstante Energiedichte des Vakuums ρ_{vac} interpretiert; sie ist konstant auch bei Expansion des Universums, sodass sie die Wirkung eines negativen Drucks $\rho_{vac} = -p$ hat und eine Beschleunigung der Ausdehnung bewirkt. Diesen Effekt haben alle Energieformen mit $\rho < -\frac{1}{3}p$, aber im Allgemeinen sind diese zeitabhängig[1].
Heute wird angenommen, dass etwa 76% der gesamten Energiedichte des Universums auf Λ zurückgehen.

Da die Einstein'schen Feldgleichungen viel zu kompliziert sind, um für das Universum gelöst werden zu können, wird das kosmologische Prinzip verwendet:

> Das Universum ist auf großen Längenskalen homogen und isotrop.

Mathematisch gesehen bedeutet räumliche Homogenität und Isotropie eine konstante Krümmung der Metrik im dreidimensionalen Unterraum.

3 Die Friedmann-Robertson-Walker-Metrik

3.1 Die Herleitung der FRW-Metrik

Zur Herleitung der Friedmann-Robertson-Walker-Metrik (FRW-Metrik) sei ein Satz von Koordinaten (x_1, x_2, x_3) mit einer Metrik gegeben. Um dieses Koordinatensystem als dreidimensionale Hyperfläche in einen vierdimensionalen Raum einzubetten, wird eine vierte fiktive Koordinate x_4 eingeführt.
Die Hyperfläche mit konstanter Krümmung kann durch die Gleichung

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = \frac{1}{k} R^2 \tag{14}$$

mit dem Krümmungsparameter k beschrieben werden. Die Metrik im vierdimensionalen euklidischen Raum sei zunächst

$$(\mathrm{d}l)^2 = (\mathrm{d}x_1)^2 + (\mathrm{d}x_2)^2 + (\mathrm{d}x_3)^2 + (\mathrm{d}x_4)^2 \tag{15}$$

wobei nun die fiktive Koordinate mithilfe Gleichung (14) eliminiert werden kann:

$$(\mathrm{d}l)^2 = (\mathrm{d}x_1)^2 + (\mathrm{d}x_2)^2 + (\mathrm{d}x_3)^2 + \frac{(x_1 \mathrm{d}x_1 + x_2 \mathrm{d}x_2 + x_3 \mathrm{d}x_3)^2}{\frac{1}{k}R^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2} \tag{16}$$

Durch die Koordinatentransformation

$$x_1 = Rr \sin\theta \cos\phi, \quad x_2 = Rr \sin\theta \sin\phi, \quad x_3 = Rr \cos\theta \tag{17}$$

kann die Metrik in ihre sog. Eigenkoordinaten mit $0 \leq r \leq 1$ umgeschrieben werden. R wird kosmischer Skalenfaktor genannt. Außerdem soll nun die zeitliche Komponente hinzugefügt werden:

$$(\mathrm{d}s)^2 = (\mathrm{d}t)^2 - (\mathrm{d}l)^2, \quad R = R(t) \tag{18}$$

[1] Eine Verallgemeinerung der Betrachtung auf zeitabhängige Energiedichten führt auf die dunkle Energie.

Das Ergebnis ist die FRW-Metrik - eine Raumzeitgeometrie, die das kosmologische Prinzip erfüllt:

$$(\mathrm{d}s)^2 = (\mathrm{d}t)^2 - R^2(t)\left[\frac{(\mathrm{d}r)^2}{1-kr^2} + r^2(\mathrm{d}\theta)^2 + r^2\sin^2\theta\,(\mathrm{d}\phi)^2\right] \tag{19}$$

3.2 Bemerkungen zur FRW-Metrik

Der Wert des Krümmungsparameters k bestimmt die prinzipielle Geometrie der Raumzeit (vgl. Abbildung 2).

Für $k = 1$ ergibt sich eine geschlossene Geometrie (Kugeloberfläche), für $k = -1$ eine offene Geometrie (Sattelfläche) und für den Grenzwert $k \to 0$ eine flache Geometrie (Ebene).

Aufgrund der angenommenen Homogenität und Isotropie des Universums kann der kosmische Skalenfaktor nur von der Zeit abhängen. Es ist wichtig zu erkennen, dass sowohl die Hyperfläche als auch das Koordinatensystem über den Skalenfaktor $R(t)$ skaliert werden (Gleichung (17)); dies wird als mitbewegtes Koordinatensystem bezeichnet. Ein zeitlich anwachsender Skalenfaktor entspricht daher einem expandierenden Universum.

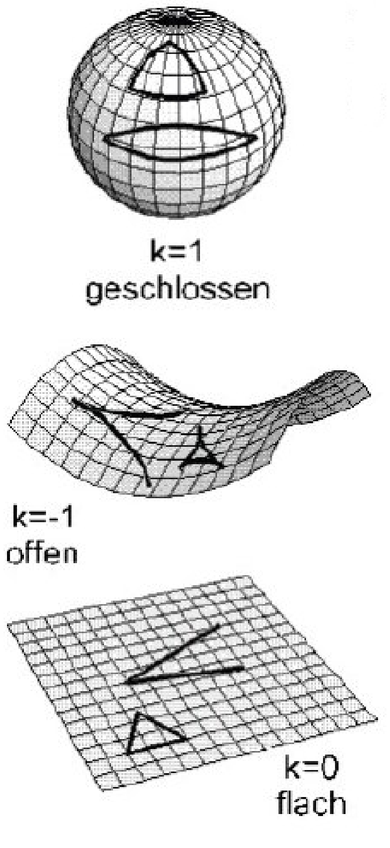

Abbildung 2: geschlossene, offene und flache Geometrie der Raumzeit

3.3 Folgerungen

3.3.1 Das Horizontvolumen

Wenn zwei Ereignisse im Universum in einem kausalen Zusammenhang stehen, dann müssen sich Informationen vom Raumzeitpunkt des einen Ereignisses zum Raumzeitpunkt des anderen ausgebreitet haben können. Dies geschieht höchstens mit Lichtgeschwindigkeit.
Sei ein Beobachter am Punkt (r_0, θ_0, ϕ_0). Von wo würde zum Zeitpunkt $t = 0$ emittiertes Licht den Beobachter zur Zeit t erreichen? Aufgrund der Homogenität kann o.B.d.A $r_0 = 0$ angenommen werden; aufgrund der Isotropie ist auch die Wahl der Richtung (θ_0, ϕ_0) beliebig. Damit das Licht den Beobachter erreicht, muss die Lichtausbreitung auf einer Geodäte (kürzeste Verbindung) durch $r_0 = 0$ erfolgen. Da auf einer Geodäte θ und ϕ konstant sind, gilt $\mathrm{d}\theta = \mathrm{d}\phi = 0$. Desweiteren gilt für Lichtausbreitung $(\mathrm{d}s)^2 = 0$. Eingesetzt in die FRW-Metrik (19) ergibt sich

$$(\mathrm{d}s)^2 = (\mathrm{d}t)^2 - R^2(t)\,\frac{(\mathrm{d}r)^2}{1 - kr^2} \overset{!}{=} 0 \tag{20}$$

und damit

$$\frac{\mathrm{d}t}{R(t)} = \frac{\mathrm{d}r}{\sqrt{1 - kr^2}} \tag{21}$$

Integriert über einen Zeitraum $[0, t]$ und den zurückgelegten Weg $[0, r_H]$ folgt

$$\int_0^t \frac{\mathrm{d}t'}{R(t')} = \int_0^{r_H} \frac{\mathrm{d}r}{\sqrt{1 - kr^2}} \tag{22}$$

und somit für den Abstand zwischen Sender und Empfänger

$$d_H(t) = R(t) \int_0^{r_H} \frac{\mathrm{d}r}{\sqrt{1 - kr^2}} \tag{23}$$

Falls $d_H(t)$ einen endlichen Wert hat, können Teilchen/ Informationen seit dem Urknall nur einen endlichen Weg zurück gelegt haben. Es wird von einem sog. Horizontvolumen, also dem Volumen, in dem sich kausal verknüfte Ereignisse ereignet haben können, gesprochen.

3.3.2 Die Rotverschiebung

Beobachtungen zeigen, dass das Licht von entfernten Objekten größtenteils rotverschoben ist. Zwei aufeinanderfolgende Wellenberge des emittierten Lichtes seien zu den Zeitpunkten t_1 bzw. $t_1 + \delta t_1$ emittiert und zu den Zeitpunkten t_0 bzw. $t_0 + \delta t_0$ empfangen worden. δt entspricht jeweils der Wellenlänge λ des Lichtes. Während ihrer Ausbreitung legen beide Wellenberge annähernd die gleiche Entfernung d zwischen Sender und Empfänger zurück:

$$d(t) = R(t) \int_{t_1}^{t_0} \frac{\mathrm{d}t}{R(t)} = R(t) \int_{t_1+\delta t_1}^{t_0+\delta t_0} \frac{\mathrm{d}t}{R(t)} \tag{24}$$

oder durch Umstellen der Integrationsgrenzen

$$d(t) = R(t) \int_{t_1}^{t_1+\delta t_1} \frac{\mathrm{d}t}{R(t)} = R(t) \int_{t_0}^{t_0+\delta t_0} \frac{\mathrm{d}t}{R(t)} \tag{25}$$

Für einen nur langsam veränderlichen oder während der Lichtausbreitung annähernd konstanten Skalenfaktor folgt

$$\frac{\delta t_1}{R\left(t_1\right)} = \frac{\delta t_0}{R\left(t_0\right)} \tag{26}$$

und somit für das Verhältnis von detektierter zu emittierter Wellenlänge

$$\frac{\lambda_0}{\lambda_1} = \frac{R\left(t_0\right)}{R\left(t_1\right)} \tag{27}$$

Daraus wird die Rotverschiebung z gemäß

$$z + 1 = \frac{\lambda_0}{\lambda_1} = \frac{R\left(t_0\right)}{R\left(t_1\right)} \tag{28}$$

definiert. In einem expandierenden Universum verringert sich die Frequenz des Lichtes bei wachsendem Skalenfaktor. Aufgrund der beobachteten Rotverschiebung kann auf ein derzeit expandierendes Universum geschlossen werden.

3.3.3 Das Hubble-Gesetz

Das Hubble-Gesetz beinhaltet den linearen Zusammenhang zwischen dem Abstand eines Objekts und seiner Rotverschiebung.
Zur Herleitung soll zunächst der Skalenfaktor, normiert durch seinen heutigen Wert $R\left(t_0\right)$, in einer Taylor-Reihe um t_0 entwickelt werden:

$$\frac{R\left(t\right)}{R\left(t_0\right)} = 1 + H_0\left(t - t_0\right) - \frac{1}{2} q_0 H_0^2 \left(t - t_0\right)^2 + \ldots \tag{29}$$

Die Größe

$$H_0 = \frac{\dot{R}\left(t_0\right)}{R\left(t_0\right)} \tag{30}$$

wird Hubble-Parameter und die Größe

$$q_0 = -\frac{\ddot{R}\left(t_0\right)}{\dot{R}^2\left(t_0\right)} R\left(t_0\right) = -\frac{\ddot{R}\left(t_0\right)}{R\left(t_0\right) H_0^2} \tag{31}$$

wird Dämpfungsparater genannt. Nach Einsetzen und kurzer Rechnung folgt für die Rotverschiebung

$$\underbrace{z \approx H_0 \cdot d}_{\text{Hubble}-\text{Gesetz}} + \frac{1}{2}\left(1 - q_0\right) H_0^2 d^2 \tag{32}$$

wobei der erste Term das eigentliche Hubble-Gesetz ist.
Sowohl der Hubble- als auch der Dämpfungsparameter können experimentell bestimmt werden. Anhand eines Wertes $H_0 = \frac{\dot{R}(t_0)}{R(t_0)} = 72\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s \cdot Mpc}} > 0$ kann auf ein derzeit expandierendes Universum geschlossen werden. Der Dämpfungsparameter macht eine Aussage über die beschleunigte/ verlangsamte Expansion des Universums; $q_0 = -0,5 < 0$ entspricht einer beschleunigten Expansion.

4 Die Friedmann-Gleichung

4.1 Die Herleitung der Friedmann-Gleichung

Die Friedmann-Gleichung kann aus den Einstein'schen Feldgleichungen und der FRW-Metrik hergeleitet werden. Dazu wird die FRW-Metrik in den Ricci-Tensor und den Ricci-Skalar eingesetzt. Es ergeben sich die nichtverschwindenden Komponenten

$$R_{00} = -3\frac{\ddot{R}}{R} \tag{33}$$

$$R_{ii} = \frac{\ddot{R}}{R} + 2\frac{\dot{R}^2}{R^2} + \frac{2k}{R^2} \tag{34}$$

und

$$\mathcal{R} = -6 \cdot \left(\frac{\ddot{R}}{R} + \frac{\dot{R}^2}{R^2} + \frac{k}{R^2}\right) \tag{35}$$

Durch Einsetzen der zeitlichen Komponente (33) des Ricci-Tensors und des Ricci-Skalars (35) in die Einstein'schen Feldgleichungen folgt die Friedmann-Gleichung, eine Differentialgleichung für die Energiedichte:

$$\frac{\dot{R}^2}{R^2} + \frac{k}{R^2} = \frac{8\pi G}{3}\rho \tag{36}$$

Durch Einsetzen der räumlichen Komponente (34) des Ricci-Tensors und des Ricci-Skalars folgt eine ähnliche Gleichung für den Druck:

$$-2\frac{\ddot{R}}{R} - \frac{\dot{R}^2}{R^2} - \frac{k}{R^2} = 8\pi G \cdot p \tag{37}$$

4.2 Der Urknall

Um den mathematischen Ursprung des Urknalls zu verstehen, soll nun durch Subtraktion der Gleichungen (33) und (34) die „Beschleunigung" des komischen Skalenfaktors $\ddot{R}$ berechnet werden:

$$\frac{\ddot{R}}{R} = -\frac{4\pi G}{3} \cdot (\rho + 3p) \tag{38}$$

Die „Geschwindigkeit" des Skalenfaktors $\dot{R}$ ist proportional zum Hubble-Parameter H_0 und damit positiv (Ausdehnung des Universums). Der Ausdruckt $\rho + 3p$ auf der rechten Seite der Gleichung ist ebenfalls per Definition positiv. Da der Skalenfaktor selbst auch größer als null ist, folgt, dass die Beschleunigung negativ (bremsend) sein muss. Daraus folgt, dass sich das Universum während seiner ganzen Entwicklung ausgedehnt haben muss, und dass es daher eine endliche Zeit $t_{BB} := 0$ in der Vergangenheit geben muss, zu der $R = 0$ war. Zu diesem Zeitpunkt haben viele kosmologische Parameter eine Singularität; er wird als Urknall (engl. *big bang*) bezeichnet.

4.3 Die Beziehung zwischen der Energiedichte und dem kosmischen Skalenfaktor

Der Energie-Impuls-Tensor des Universums enthält alle Felder und alle Materie, wobei die entsprechenden Größen unbekannt sind. Eine Symmetrie schränkt die Zahl der Unbekannten jedoch stark ein: Aufgrund des kosmologischen Prinzips kann der Energie-Impuls-Tensor nur Diagonalelemente besitzen und seine räumlichen Komponenten müssen äquivalent sein. Die einfachste (nicht einzige) Wahl eines solchen Tensors ist der einer idealen Flüssigkeit

$$T^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -p \end{pmatrix} \tag{39}$$

Da das Universum als abgeschlossenes System angesehen wird, soll Energieerhaltung, d.h.

$$T^{\mu\nu}_{;\nu} = 0 \tag{40}$$

gelten[2]. Bei der $(\mu = 0)$-Komponente dieser Gleichung handelt es sich um den 1. Hauptsatz der Thermodynamik für adiabatische Zustandsänderungen:

$$\mathrm{d}\left(\rho R^3\right) = -p\mathrm{d}R^3 \tag{41}$$

Er besagt, dass die Änderung der Energie im mitbewegten Volumenelement dem negativen Druck multipliziert mit der Volumenänderung entspricht.

Sei nun der Zusammenhang zwischen Energiedichte und Druck über einen zeitunabhängigen Proportionalitätsfaktor w gegeben:

$$p = w \cdot \rho \tag{42}$$

Nach dem Einsetzen in den 1. Hauptsatz folgt

$$-\frac{\mathrm{d}R^3}{R^3} = \frac{1}{w+1}\frac{\mathrm{d}\rho}{\rho} \tag{43}$$

und das wiederum liefert die Abhängigkeit der Energiedichte vom Skalenfaktor:

$$\rho \propto R^{-3(1+w)} \tag{44}$$

Der Proportionalitätsfaktor w war unterschiedlich in verschiedenen Stadien des Universums:

- Im strahlungsdominierten (RD) frühen Universum[3] kann die Statistik relativistischer Quantengase angewendet werden:

$$w = \frac{1}{3} \Rightarrow \rho \propto R^{-4} \tag{45}$$

- Im materiedominierten (MD) Universum ab etwa 10.000 y war die Energie der vormals hochrelativistischen Teilchen bereits zu gering, um ein Wasserstoffatom zu ionisieren. Der Druck war proportional zur Temperatur, die damals bereits fast null war:

$$w = 0 \Rightarrow \rho \propto R^{-3} \tag{46}$$

- Im vakuumenergiedominierten (VD) Universum während der inflationären Phase war die Vakuumenergie vorherrschend und die kosmologische Konstante $\Lambda \neq 0$:

$$w = -1 \Rightarrow \rho = const. \tag{47}$$

[2] Bei der Schreibweise $T^{\mu\nu}_{;\nu}$ handelt es sich um die kovariante Ableitung der ART, die unter anderem die Christoffelsymbole beinhaltet, aber deren genaue Form an dieser Stelle unwichtig ist.

[3] Strahlung beinhaltet hier sowohl Photonen als auch hochrelativistische Materieteilchen.

4.4 Der Zusammenhang zwischen der Energiedichte und der Gestalt des Universums

Um die Gestalt des Universums mit der Enegiedichte in Zusammenhang zu bringen, muss ein mathematischer Zusammenhang zwischen dem Krümmungsparamter k und der Dichte ρ hergestellt werden. Dazu wird $\frac{\dot{R}}{R} = H$ in die Friedmann-Gleichung eingesetzt:

$$\frac{k}{H^2 R^2} = \frac{\rho}{\frac{3H^2}{8\pi G}} - 1 =: \Omega - 1 \tag{48}$$

mit dem Dichteverhältnis $\Omega = \frac{\rho}{\rho_c}$ und der sog. kritischen Dichte $\rho_c = \frac{3H^2}{8\pi G}$.
Mit $H^2 R^2 > 0$ kann nun folgender Zusammenhang gefunden werden:

$$\begin{array}{ccl} k = +1 & \Omega > 1 & \text{geschlossen} \\ k = \ \ 0 & \Omega = 1 & \text{flach} \\ k = -1 & \Omega < 1 & \text{offen} \end{array}$$

4.5 Die Abschätzung der Energiedichte aus dem Dämpfungsparameter

Mithilfe der Friedmann-Gleichung und der Beschleunigung des kosmischen Skalenfaktors kann der Dämpfungsparameter in Abhängigkeit des Proportionalitätsfaktors w ausgedrückt werden:

$$q_0 = -\frac{\ddot{R}(t_0)}{R(t_0)} \frac{1}{H_0^2} = \frac{\Omega_0}{2} \left(1 + \frac{3p}{\rho}\right) = \frac{\Omega_0}{2} \cdot (1 + 3w) \tag{49}$$

wobei $\Omega_0 = \frac{\rho_0}{\rho_{c,0}}$. Für die verschiedenen Stadien des Universums ergibt sich daher

$$\begin{array}{ccc} \text{MD} & w = 0 & q_0 = \frac{\Omega_0}{2} \\ \text{RD} & w = \frac{1}{3} & q_0 = \Omega_0 \\ \text{VD} & w = -1 & q_0 = -\Omega_0 \end{array}$$

Da der Dämpfungsparameter messbar und negativ ist, das Dichteverhältnis Ω_0 jedoch positiv sein muss, folgt, dass wir in einem materiedominierten Universum mit positiven Vakuumenergie-Anteilen leben.

4.6 Das Alter des Universums

Das Alter des Universums kann durch die Integration der Friedmann-Gleichung berechnet werden.
Im materiedominierten Universum gilt $\rho \propto R^{-3}$ bzw.

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \left(\frac{R}{R_0}\right)^{-3} \tag{50}$$

Eingesetzen in die Friedmann-Gleichung und die Substitution $x = (1+z)^{-1}$ führt auf

$$t = \int_0^{(1+z)^{-1}} \frac{\mathrm{d}x}{H_0 \cdot \sqrt{1 - \Omega_0 + \frac{\Omega_0}{x}}} \tag{51}$$

Die Zeitskala des Universums ist also durch die sog. Hubble-Zeit H_0^{-1} gegeben. Für $z = 0$ folgt nun das Alter des Universums in Abhängigkeit von den Größen H_0 und Ω_0 (vgl. Abbildung 3; die Kurve für das strahlungsdominierte Universum ergibt sich entsprechend).

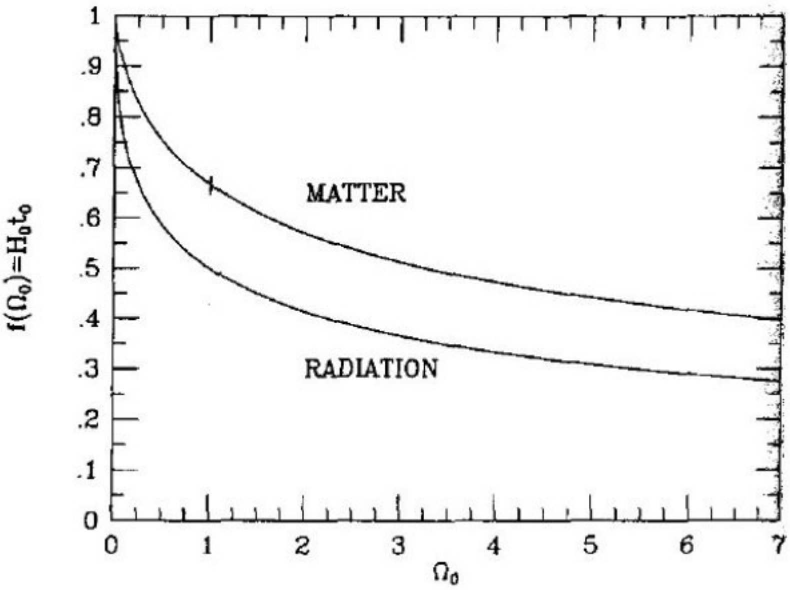

Abbildung 3: Das Alter des Universums in Einheiten der Hubble-Zeit als Funktion des Dichteverhältnisses

Für ein flaches Universums ($\Omega_0 = 1$) ergibt sich das Alter des Universums zu $t_{0,MD} = 9,2 \cdot 10^9$ y. Dies entspricht nicht dem heute angenommenen Wert.
Um den Wert zu korrigieren, soll nun das Alter des materiedominierten Universums mit positiven Vakuumenergie-Anteilen berechnet werden. Dazu wird weiterhin von einem flachen Universum ausgegangen ($k = 0$, $\Omega_0 = 1$) und zur Berücksichtigung der Vakuumenergie-Anteile wird ein Term für die kosmologische Konstante zur Friedmann-Gleichung hinzu addiert:

$$\left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho_{Materie} + \frac{\Lambda}{3} \tag{52}$$

Es handelt sich nun um die zusammengesetzte Energiedichte

$$\Omega_0 = \Omega_{Vakuum} + \Omega_{Materie} = 1 \tag{53}$$

Die entsprechende Alterskurve ist in Abbildung 4 dargestellt. Für den aktuell angenommenen Vakuumenergie-Anteil von etwa 76% beträgt das Alter des Universum die erwarteten $t_0 = 13,7 \cdot 10^9$ y.

4.7 Die Lösung der Friedmann-Gleichung und die Entwicklung des Universums

Die Lösung der Friedmann-Gleichung für ein flaches Universum

$$\left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho \tag{54}$$

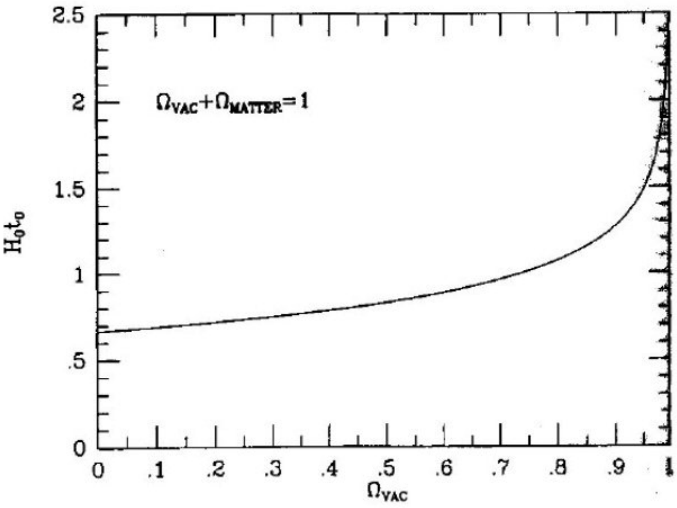

Abbildung 4: Alterskurve für ein materiedominiertes Universum mit positiven Vakuumenergie-Anteilen

liefert die zeitliche Entwicklung des kosmischen Skalenfaktors und lässt damit Aussagen über die Entwicklung des Universums zu.
Mit $\rho \propto R^{-3(1+w)}$ folgt aus (54):

$$\dot{R} \propto R^{-\frac{3}{2}w+\frac{1}{2}} \tag{55}$$

bzw.

$$R^{-\frac{3}{2}w+\frac{1}{2}} \cdot \mathrm{d}R \propto \mathrm{d}t \tag{56}$$

Integration und Inversion liefern daraus die zeitliche Entwicklung

$$R \propto t^{\frac{2}{3\cdot(w+1)}} \tag{57}$$

Für ein vakuumenergie-dominiertes Universum kann diese Lösung wegen $w = -1$ nicht verwendet werden. Aus $\dot{R} \propto R$ folgt jedoch direkt

$$R \propto e^{H_0 \cdot t} \tag{58}$$

Die verschiedenen Lösungen sind in Abbildung 5 dargestellt. Ein leeres und ein offenes Universum würde bis in alle Ewigkeit beschleunigt expandieren. In einem flachen Universum wird die Beschleunigung langsam abnehmen, aber es wir nie zu einer Kontraktion kommen. Ein gschlossenes Universum würde ab einem bestimmten Zeitpunkt kollabieren.

5 Zusammenfassung

Das Äquivalenzprinzip ist eine wichtige Grundlage der Allgemeinen Relativitätstheorie. Es besagt, dass die Bewegung ein einem beschleunigten Bezugssystem äquivalent zur Bewegung im homogenen statischen Schwerefeld ist.
Die Einstein'schen Feldgleichungen beschreiben, wie jegliche Form von Energie, zusammengefasst im Energie-Impuls-Tensor, ein Gravitationsfeld, also eine Krümmung der Raumzeit bewirkt.

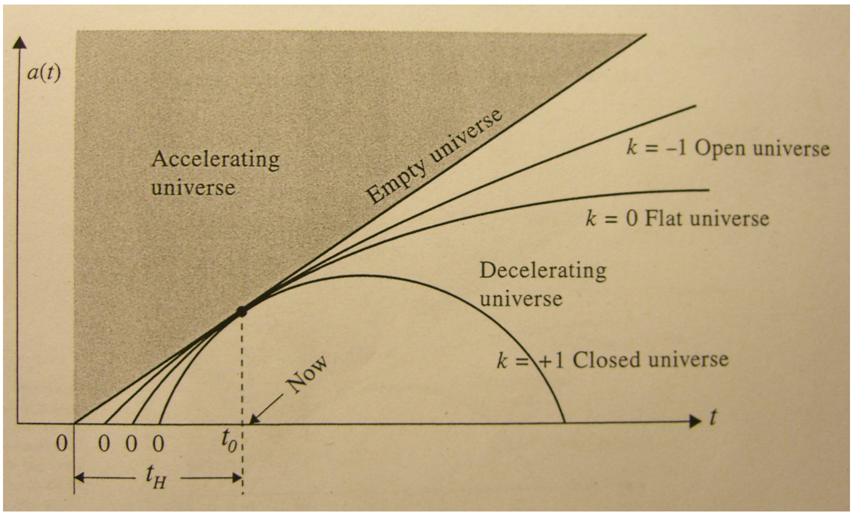

Abbildung 5: Lösung der Friedmann-Gleichung für verschiedene Geometrien des Universums

Die Friedmann-Robertson-Walker-Metrik ist eine Raumzeitgeometrie, die das kosmologische Prinzip erfüllt. Sie löst die Einstein'schen Feldgleichungen.
Das Horizontvolumen, die Rotverschiebung und das Hubble-Gesetz folgen aus der FRW-Metrik.
Die beobachtbaren Werte des Hubble-Parameters und des Dämpfungsparameters lassen auf eine derzeit beschleunigt expandierendes Universum schließen.

Die Friedmann-Gleichung kann aus den Einstein'schen Feldgleichungen und der FRW-Metrik hergeleitet werden. Sie ist eine Differentialgleichung für die Energiedichte des Universums. Die aus ihr folgerbare zeitliche Entwicklung des kosmischen Skalenfaktors in der Vergangenheit ist ein Hinweis auf die Urknall-Theorie. Es konnte eine direkte Beziehung zwischen der Gestalt des Universums und dem Energiedichteverhältnis hergestellt werden. Derzeit befinden wir uns in einem materiedominierten Universum mit positiven Vakuumenergie-Anteilen.
Das Alter des Universums kann in Abhängigkeit des Hubble-Parameters und der Energiedichtenverhältnisses aus der Friedmann-Gleichung bestimmt werden.
Die Lösung der Friedmann-Gleichung beschreibt die zeitliche Entwicklung des kosmischen Skalenfaktors. Derzeit expandiert das Universum zwar verlangsamt, aber fortwährend.

A Literatur

- E.W. Kolb, M.S. Turner: *The Early Universe*, Addison Wesley, 1991
- T.-P. Cheng: *Relativity, Gravitation and Cosmology: A Basic Introduction*, Oxford University Press, 2004
- M. Treichel: *Teilchenphysik und Kosmologie: Eine Einführung in Grundlagen und Zusammenhänge*, Springer, 2000
- Mitschrift zur Vorlesung „Allgemeine Relativitätstheorie“, Prof. Dr. G. Münster, Wintersemester 2007/2008, WWU Münster
- Mitschrift zur Vorlesung „Astrophysik und Kosmologie“, Prof. Dr. Ch. Weinheimer, Wintersemester 2007/2008, WWU Münster