

# Instantonen

## Seminar zur Theorie der Teilchen und Felder

Jan Hermes

Ausarbeitung zum Vortrag vom 5. Dezember 2007

### Inhaltsverzeichnis

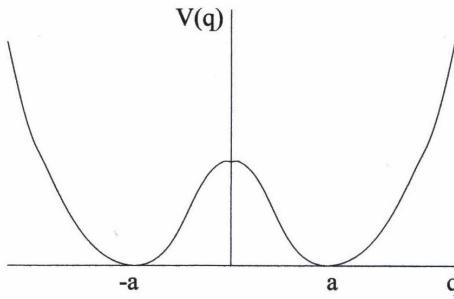
<b>1 Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>2 Vorüberlegungen</b>	<b>2</b>
2.1 Das Pfadintegral . . . . .	2
2.2 Das euklidische Pfadintegral . . . . .	2
<b>3 Der erste Schritt: Die Einfachmulde</b>	<b>3</b>
3.1 Semiklassische Näherung . . . . .	3
3.2 Wechsel in den Fourier-Raum . . . . .	4
<b>4 Das Doppelmuldenpotential</b>	<b>5</b>
4.1 Einführende Worte . . . . .	5
4.2 Berechnung der Übergangsamplitude . . . . .	6
<b>5 Instantonen im periodischen Potential</b>	<b>9</b>
<b>6 Zusammenfassung</b>	<b>9</b>

### 1 Einleitung

In den ersten Vorlesungen zur Quantenmechanik werden typischerweise der harmonische Oszillator und das Wasserstoffatom als Paradebeispiele des analytisch exakt lösbarer Problems besprochen. Dringt man tiefer in die Materie ein, so werden die Problemstellungen komplizierter und nicht mehr exakt berechenbar.

Ein Hilfsmittel um dennoch wenigstens Näherungslösungen erhalten zu können, die die wirkliche Lösung möglichst genau approximieren, ist die Störungstheorie. Schaut man sich aber das im Folgenden verwendete Doppelmuldenpotential an, so stellt man fest, dass die Störungstheorie nicht alle Phänomene beschreibt oder richtig erfasst. In Abbildung 1 ist das eben erwähnte Potential skizziert. Aus klassischer Sicht existieren zwei entartete Grundzustände. Ein Teilchen, das sich in diesem Potential befindet, besitzt in jeder der beiden Mulden die gleiche Energie sofern es ruht. Quantenmechanisch tritt allerdings eine Energieaufspaltung  $\Delta E$  dieser beiden Grundzustandsenergien auf, die nicht über die Störungstheorie erhalten werden kann. Wendet man jedoch den Pfadintegralformalismus auf dieses Problem an, so treten bei der Berechnung der Energiedifferenz nichttriviale Lösungen der euklidischen Bewegungsgleichung auf, die sogenannten Instanton-Lösungen. Diese liefern die zu Erwartende Energiedifferenz  $\Delta E$ . Die Übergangsamplitude der Instanton-Lösungen ist so klein, dass sie für die Störungstheorie unsichtbar bleibt.

Das Ziel dieser Arbeit ist es, die Energiedifferenz  $\Delta E$  mittels Pfadintegralformalismus zu berechnen.



**Abb. 1:** Doppelmuldenpotential

## 2 Vorüberlegungen

In diesem Kapitel soll das mathematische Rüstzeug bereitgestellt werden, welches im späteren Verlauf dieser Ausarbeitung benutzt wird. Da vieles zum Pfadintegralformalismus in vorangegangenen Vorträgen bereits gesagt wurde, ist dieses Kapitel eher knapp, aber dennoch ausreichend, ausfallen.

### 2.1 Das Pfadintegral

Die quantenmechanische Übergangsamplitude und damit das Pfadintegral ist gegeben durch

$$\langle q_f, t_f | q_i, t_i \rangle = \langle q_f | e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{H} t} | q_i \rangle = \int \mathcal{D}q \, e^{\frac{i}{\hbar} S[q]} , \quad (1)$$

wobei der Index  $i$  für „initial“ und  $f$  für „final“ steht und somit Anfangs- und Endzustand gekennzeichnet sind. Im letzten Term ist  $S[q]$  die Wirkung und gegeben durch:

$$S = \int dt \left( \frac{1}{2} m \dot{q}^2 - V(q) \right) . \quad (2)$$

Erwähnenswert ist noch das „symbolische“ Integralmaß  $\mathcal{D}q$ , welches mathematisch nicht exakt ist und die Integrationen über alle Zeitpunkte  $dq(t_1) \dots dq(t_{N-1})$  unserer diskretisierten Zeitskala beinhaltet.

### 2.2 Das euklidische Pfadintegral

Geht man nun zu imaginären Zeiten

$$t \longrightarrow e^{-i\alpha} \tau , \quad \tau \in \mathbb{R}$$

über, wobei  $\tau$  euklidische Zeit genannt wird, so folgt das euklidische Pfadintegral für  $\alpha = \pi/2$ . Dieser Übergang entspricht gerade einer Wick-Rotation von  $90^\circ$  und liefert nach Einsetzen in Gleichung 1 das gesuchte euklidische Pfadintegral:

$$\langle q_f | e^{-\frac{1}{\hbar} \hat{H} \tau} | q_i \rangle = \int \mathcal{D}q \, e^{-\frac{1}{\hbar} S_E[q]} . \quad (3)$$

Die Wirkung  $S_E$  ist hier mit einem Index  $E$  gekennzeichnet, da es sich um die euklidische Wirkung

$$S_E = \int d\tau \left( \frac{1}{2} m \dot{q}^2 + V(q) \right)$$

handelt, die sich von der minkowskischen Wirkung  $S$  um das Vorzeichen vor dem Potential  $V(q)$  unterscheidet.

Über die Variation der Wirkung gelangt man zu den *Euler-Lagrange-Gleichungen*, die dann die klassische Euklidische Bewegungsgleichung

$$m\ddot{q} = V'(q) \quad (4)$$

ergibt. Ein fundamentaler Unterschied zur Newtonschen Bewegungsgleichung ist das fehlende Vorzeichen vor der ersten Ortsableitung des Potentials.

### 3 Der erste Schritt: Die Einfachmulde

#### 3.1 Semiklassische Näherung

Ab diesem Kapitel wird ausschließlich das euklidische Pfadintegral verwendet, weshalb der Index  $E$  an der euklidischen Wirkung  $S_E$  im Folgenden weggelassen wird.

Nun wird ein Potential der Form

$$V(q) = \frac{1}{2}m\omega^2 q^2 + \lambda q^4 \quad (5)$$

betrachtet, welches für positive  $\lambda$  ein Potential mit lediglich einer Mulde darstellt. Wie bereits oben erwähnt, fehlt in der klassischen euklidischen Bewegungsgleichung ein Vorzeichen vor dem Potentialterm. Dies kann nun so interpretiert werden, als ob das Potential im Euklidischen eine Invertierung erfährt und fortan „auf dem Kopf steht“. Ein Teilchen bewegt sich also dementsprechend in  $-V(q)$ .

Das Ziel dieses Kapitels ist es, die Übergangsamplitude

$$A = \int \mathcal{D}q e^{\frac{i}{\hbar} S[q]} \quad (6)$$

zu berechnen. Dazu muss die Wirkung  $S[q]$  bestimmt werden, wobei  $q$  die Menge unserer möglichen Pfade darstellt. Um das Problem zu lösen, separieren wir einen beliebigen Pfad  $q(\tau)$  in den klassischen Pfad  $q_{cl}(\tau)$  und einen Variationspfad  $y(\tau)$ :

$$q(\tau) = q_{cl}(\tau) + y(\tau) ,$$

der die Randbedingungen  $y(\tau_i) = y(\tau_f) = 0$  erfüllt. Mittels Funktionalableitung lässt sich die Wirkung schreiben als:

$$\begin{aligned} S[q] &= S[q_{cl} + y] \\ &= S[q_{cl}] + \underbrace{\int d\tau \frac{\delta S[q_{cl}]}{\delta q(\tau)} y(\tau)}_{=0} \\ &\quad + \frac{1}{2} \iint d\tau d\tau' \frac{\delta^2 S[q_{cl}]}{\delta q(\tau) \delta q(\tau')} y(\tau) y(\tau') \\ &\quad \vdots \\ &= S[q_{cl}] + S[y] . \end{aligned}$$

Der Term linear in  $y(\tau)$  verschwindet, da der klassische Pfad  $q_{cl}$  die Bewegungsgleichung erfüllt und somit die lineare Variation verschwindet. Wir haben unsere Wirkung nun in eine Wirkung für den klassischen Pfad und eine für den varierten Pfad separiert. Führt man die Funktionalableitungen aus, so erhält man:

$$S[q_{cl} + y] = \int_{-\tau/2}^{\tau/2} d\tau \left( \frac{1}{2} m \dot{q}_{cl}^2 + V(q_{cl}) \right) + \int_{-\tau/2}^{\tau/2} d\tau \left( \frac{1}{2} m \dot{y}^2 + \frac{1}{2} V''(q_{cl}) y^2 \right) + \dots . \quad (7)$$

Die höheren Terme der Funktionalableitung wurden hier vernachlässigt. Setzt man das Ergebnis in das Pfadintegral ein, ergibt sich:

$$A = e^{-S[q_{cl}]/\hbar} \int \mathcal{D}y \ e^{-\int d\tau \left( \frac{1}{2}m\dot{y}^2 + \frac{1}{2}V''(q_{cl})y^2 \right)/\hbar}. \quad (8)$$

Die Wirkung zum Variationspfad  $y$  kann mittels partieller Integration noch umgeschrieben werden:

$$S[y] = \int d\tau \left( \frac{1}{2}m\dot{y}^2 + \frac{1}{2}V''(q_{cl})y^2 \right) = \frac{1}{2} \int d\tau y \left( -m\frac{d^2}{d\tau^2} + V''(q_{cl}) \right) y. \quad (9)$$

### 3.2 Wechsel in den Fourier-Raum

Nun gibt es ein VONS (*Vollständiges Orthonormalsystem*) zu den Funktionen  $y$ , die die Eigenwertgleichung

$$\left( -m\frac{d^2}{d\tau^2} + V''(q_{cl}) \right) y = \lambda y \quad (10)$$

erfüllen, wobei  $\lambda$  den Eigenwert darstellt. Um das Problem weiter angehen zu können, wechselt man in den Fourierraum, d.h. unsere Funktionen werden nach den Fourierkoeffizienten  $a_k$  entwickelt:

$$y(\tau) = \sum_k a_k y_k(\tau). \quad (11)$$

Setzt man nun die Summe in Gleichung 9 ein, ergibt sich:

$$\begin{aligned} S[y] &= \frac{1}{2} \int d\tau \sum_k a_k y_k \left( -m\frac{d^2}{d\tau^2} + V''(q_{cl}) \right) \sum_l a_l y_l \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k,l} a_k a_l \lambda_l \int d\tau y_k y_l \\ &= \frac{1}{2} \sum_k a_k^2 \lambda_k \end{aligned} \quad (12)$$

Der dritte Schritt folgt aus dem zweiten, wenn man die Orthogonalitätsrelation

$$\int d\tau y_k y_l = \delta_{k,l}$$

benutzt, die die Summation über einen der beiden Indizes eliminiert. Das Ergebnis für die Wirkung in Gleichung 12 kann nun benutzt werden, um das Pfadintegral auszuwerten. Das Resultat

$$A = J \int \prod_k da_k e^{-\sum_k a_k^2 \lambda_k / 2\hbar}$$

ist ein Gauß-Integral über alle Fourierkoeffizienten  $a_k$ , was exakt berechnet werden kann.  $J$  ist die Jacobi-Determinante und quasi für die Transformation unserer Funktionen  $y(\tau)$  nach den Koeffizienten  $a_k$  verantwortlich. Wertet man das Integral aus, erhält man die gesuchte Amplitude zu

$$A = J \prod_k \sqrt{\frac{2\pi\hbar}{\lambda_k}} = J \prod_k \sqrt{2\pi\hbar} \det^{-1/2} \left( -m\frac{d^2}{d\tau^2} + V''(q_{cl}) \right).$$

Für das Produkt der Eigenwerte wurde hier die Determinante unsere Operatorrelation aus Gleichung 10 eingesetzt.

Zieht man den konstanten Vorfaktor noch in die Funktionaldeterminante, erhält man als Endergebnis:

$$A = \mathcal{J} \det^{-1/2} \left( -m\frac{d^2}{d\tau^2} + V''(q_{cl}) \right).$$

Das stilisierte  $\mathcal{J}$  deutet an, dass es nicht mehr mit dem vorherigen  $J$  identisch ist. Der nächste Schritt würde die Berechnung der Determinante beinhalten. Da dies jedoch nicht trivial und mit Aufwand verbunden ist, wird im Folgenden das Ergebnis angegeben. Die Übergangssamplitude berechnet sich zu

$$A = \sqrt{\frac{m\omega}{\pi\hbar}} e^{-\tau\omega/2}. \quad (13)$$

Nun kann noch die Grundzustandsenergie abgeschätzt werden, indem man in den mittleren Term in Gleichung 1 eine vollständige Eins (1) einschiebt

$$A = \langle q_f | e^{-\frac{1}{\hbar}\hat{H}\tau} | q_i \rangle = \sum_n \langle q_f | n \rangle \langle n | q_i \rangle e^{-\frac{1}{\hbar}E_n\tau}. \quad (14)$$

Für sehr große  $\tau$  überwiegen in der Exponentialfunktion die Energien niedrigster Ordnung. Über einen Exponentenvergleich der Exponentialfunktionen in den Gleichungen 13 und 14 erhält man die Grundzustandsenergie:

$$\underline{E_0 = \frac{\hbar\omega}{2}}.$$

Dieses Ergebnis stellt lediglich eine Lösung in erster Näherung dar, da im Laufe der Berechnung höhere Terme vernachlässigt wurden. Man erkennt aber, dass die Grundzustandsenergie der Einfachmulde in erster Näherung durch die Grundzustandsenergie des harmonischen Oszillators gegeben ist.

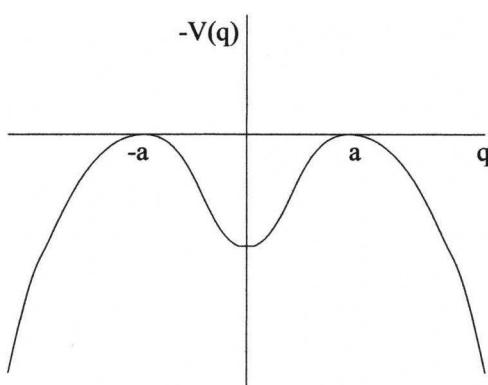
## 4 Das Doppelmuldenpotential

### 4.1 Einführende Worte

Im folgenden Kapitel wird wieder von der euklidischen Bewegungsgleichung ausgegangen. Diesmal nimmt das zu untersuchende Potential folgende Form an:

$$V(q) = \lambda(q^2 - a^2)^2. \quad (15)$$

Das invertierte Potential ist in Abbildung 2 gezeigt.



**Abb. 2:** Invertiertes Doppelmuldenpotential

Bereits in der Einleitung wurde erwähnt, dass wir nach Lösungen minimaler Energie suchen. Der Energiesatz nimmt hier die Form

$$E = \frac{1}{2}mq^2 - V(q) \quad (16)$$

an, sodass wir zwei Lösungen minimaler Energie sofort ablesen können. Es handelt sich dabei um die Maxima des Potentials:

$$q(\tau) = \pm a. \quad (17)$$

Anschaulich lassen sich diese Lösungen folgendermaßen verstehen: Ein Teilchen befindet sich zu Beginn ( $q_i = \pm a$ ) auf einem der beiden Hügel und verharrt dort unendlich lange ( $q_f = \pm a$ ). Quantenmechanisch gesehen würde

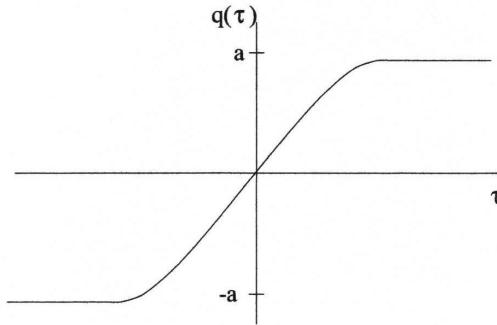
es Nullpunktsschwingungen auf einem der beiden Hügel ausführen.

Setzen wir allerdings  $q_i = a$  und  $q_f = -a$ , so treten im Limes großer Zeiten nichtriviale Lösungen

auf, die ebenfalls die Bewegungsgleichung erfüllen und Instanton- (+) bzw. Anti-Instanton-Lösungen (-) genannt werden. Sie sind gegeben durch

$$q(\tau) = \pm a \tanh \left( \frac{\omega(\tau - \tau_0)}{2} \right). \quad (18)$$

$\tau_0$  ist dabei das Zentrum des Instantons, hier gegeben durch den Nulldurchgang (siehe Abbildung 3). In diesem Fall befindet sich das Teilchen zu Beginn auf einem der beiden Hügel und rollt



**Abb. 3:** Instanton-Lösung

dann auf den anderen zu, um nach unendlich langer Zeit auf dem zweiten Hügel liegen zu bleiben. Erwähnenswert ist, dass die Instantonlösungen nur im Euklidischen existieren, da ein Teilchen im Minkowski-Raum ohne Energie nicht von  $-a$  nach  $a$  bzw. umgekehrt gelangen kann.

Instantonen sind lokalisiert in der Zeit und spielen in der QFT eine wichtige Rolle, da man mit ihnen Prozesse mit exponentiell kleiner Übergangsamplitude beschreiben kann. Die Instanton-Lösungen interpolieren zwischen den beiden (klassischen) Grundzuständen. Das System befindet sich demnach in einem der beiden Zustände bis auf einen kurzen Augenblick (im Englischen: „*for an instant*“), daher der Name **Instanton**.

Um zu verifizieren, ob die Instanton-Lösungen wirklich die Bewegungsgleichung erfüllen, bildet man die ersten beiden zeitlichen Ableitungen von Gleichung 18:

$$\begin{aligned} \dot{q}(\tau) &= \pm \frac{a\omega}{2} \operatorname{sech}^2 \left( \frac{\omega(\tau - \tau_0)}{2} \right) \\ &= \pm \frac{a\omega}{2} \left( 1 - \frac{q^2}{a^2} \right) \\ &= \mp \frac{\omega}{2a} (q^2 - a^2) \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \ddot{q}(\tau) &= \mp \frac{\omega}{a} q \dot{q} \\ &= \frac{\omega^2}{2a^2} q (q^2 - a^2) \\ &= \frac{1}{m} V'(q). \end{aligned} \quad (20)$$

Und damit:

$$m\ddot{q} - V'(q) = 0.$$

## 4.2 Berechnung der Übergangsamplitude

Bei der Berechnung der Übergangsamplitude gilt es zwei Fälle zu unterscheiden. In Fall 1 sind  $q_i = q_f = \pm a$ , d.h. wir benötigen mindestens ein Anti-Instanton und ein Instanton, um diesen Fall zu realisieren (dargestellt in Abbildung 4). Da das betrachtete Zeitintervall aber sehr groß

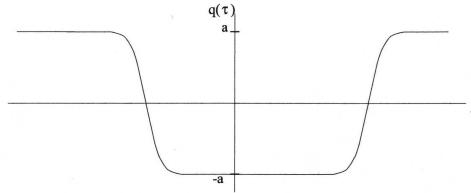


Abb. 4: Anti-Instanton/Instanton-Konfiguration

ist (wir betrachten den Limes großer Zeiten) und die Instanton-Lösungen zeitlich lokalisiert sind, ist auch eine Multi-Instanton-Konfiguration denkbar, solange gleich viele Anti-Instantonen wie Instantonen vorliegen. Hier und im Folgenden soll angenommen werden, dass sich die einzelnen Instantonen nicht gegenseitig beeinflussen bzw. wechselwirken.

Fall 2 würde  $q_i = \pm a$ ,  $q_f = \mp a$  bedeuten; hier gäbe es eine ungerade Gesamtzahl an Instantonen und Anti-Instantonen.

Die Berechnung der Übergangsamplitude wird für Fall 1 ausgeführt.

Wie bereits oben erwähnt, erhält man Anti-Instanton/Instanton-Paare und die Gesamt-Übergangsamplitude kann geschrieben werden als

$$A = A^0 + A^2 + A^4 + \dots ,$$

wobei der Exponent die Anzahl der Instantonen angibt.  $A^0$  ist demnach die Übergangsamplitude für den Fall, dass gar kein Instanton vorliegt. Dieser Fall wurde bereits im dritten Kapitel zu

$$A^0 = \sqrt{\frac{m\omega}{\pi\hbar}} e^{-\tau\omega/2}$$

bestimmt.

Für den Beitrag  $A^2$  nehmen wir an, dass sich ein Anti-Instanton bei  $\tau_1$  und ein Instanton bei  $\tau_2$  befindet, wobei  $\tau_2 > \tau_1$ . Jetzt spalten wir unsere Lösung  $q(\tau)$  wieder in den klassischen Pfad  $q_{cl}$  und einen variierten Pfad  $y(\tau)$  auf. Für die Wirkung folgt:

$$S[q] = S[q_{cl}] + S^{quad}[y] ,$$

wobei  $S[q_{cl}]$  gerade die doppelte Wirkung eines einzelnen Instantons ist.  $quad$  soll hier die quadratische Wirkung kennzeichnen und meint nicht, dass die Wirkung quadriert wird. Die Instantonwirkung ist gegeben durch:

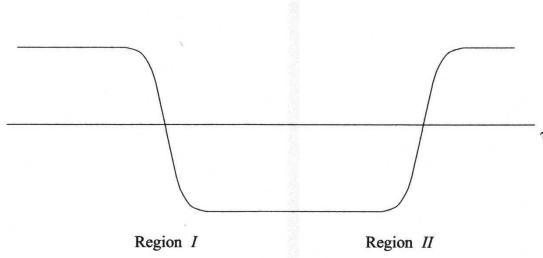
$$\begin{aligned} S^{Inst}[q] &= \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \left( \frac{1}{2} m \dot{q}^2 + V(q) \right) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} d\tau m \dot{q}^2 \\ &= \int_{-a}^a dq m \dot{q} \\ &= \frac{4}{3} a^3 \sqrt{\frac{m\lambda}{3}} . \end{aligned}$$

Als nächstes wird das Zeitintervall gemäß Abbildung 5 in zwei Regionen unterteilt. Die gesuchte quadratische Übergangsrate

$$A^2 = \frac{\tau^2}{2} e^{-2S^{Inst}} \int_{1+2} \mathcal{D}y e^{-S^{quad}/\hbar}$$

mit

$$S^{quad} = S_1^{quad} + S_2^{quad}$$



**Abb. 5:** Separation in zwei Bereiche

separiert nun in zwei Anteile, da eine Wechselwirkung der Instantonen ausgeschlossen wurde:

$$\int_{1+2} \mathcal{D}y e^{-S^{quad}/\hbar} = \int_1 \mathcal{D}y e^{-S_1^{quad}/\hbar} \cdot \int_2 \mathcal{D}y e^{-S_2^{quad}/\hbar}. \quad (21)$$

Weiterhin muss auch der Fall berücksichtigt werden, dass gar kein Instanton vorliegt. Dieser konstante „Kein-Instanton“-Hintergrund separiert analog zu Gleichung 21:

$$\int \mathcal{D}y e^{-S^{quad,0}/\hbar} = \int_1 \mathcal{D}y e^{-S_1^{quad,0}/\hbar} \cdot \int_2 \mathcal{D}y e^{-S_2^{quad,0}/\hbar}. \quad (22)$$

Aus den letzten beiden Gleichungen erhält man nun:

$$\int_{1+2} \mathcal{D}y e^{-S^{quad}/\hbar} = \int \mathcal{D}y e^{-S^{quad,0}/\hbar} \cdot \underbrace{\frac{\int_1 \mathcal{D}y e^{-S_1^{quad}/\hbar}}{\int_1 \mathcal{D}y e^{-S_1^{quad,0}/\hbar}}}_{R} \underbrace{\frac{\int_2 \mathcal{D}y e^{-S_2^{quad}/\hbar}}{\int_2 \mathcal{D}y e^{-S_2^{quad,0}/\hbar}}}_{R}. \quad (23)$$

$R$  gibt das Verhältnis der Instantonkonfigurationen an. Hier ist dies genau der Anteil zwischen der An- und Abwesenheit eines (Anti-)Instantons. Da der erste Term nach dem Gleichheitszeichen in Gleichung 23

$$\int \mathcal{D}y e^{-S^{quad,0}/\hbar} = \sqrt{\frac{m\omega}{\pi\hbar}} e^{-\tau\omega/2} R^2$$

bereits im zweiten Kapitel berechnet wurde, kann die Übergangsamplitude angegeben werden:

$$A^2 = \frac{\tau^2}{2} e^{-2S^{Inst}/\hbar} \sqrt{\frac{m\omega}{\pi\hbar}} e^{-\tau\omega/2} R^2. \quad (24)$$

Ähnliche Überlegungen können jetzt zum Anteil  $A^4$  gemacht werden. Hier lautet das Ergebnis:

$$A^4 = e^{-4S^{Inst}/\hbar} \sqrt{\frac{m\omega}{\pi\hbar}} e^{-\tau\omega/2} R^4 \frac{\tau^4}{4!}.$$

Summation über alle Beiträge zur Übergangsamplitude liefert

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{\frac{m\omega}{\pi\hbar}} e^{-\tau\omega/2} \left( 1 + \frac{(\tau R e^{-S^{Inst}/\hbar})^2}{2!} + \frac{(\tau R e^{-S^{Inst}/\hbar})^4}{4!} + \dots \right) \\ &= \sqrt{\frac{m\omega}{\pi\hbar}} e^{-\tau\omega/2} \cosh(\tau R e^{-S^{Inst}/\hbar}). \end{aligned}$$

Dies ist die Übergangswahrscheinlichkeit für den Fall, dass Anfangs- ( $q_i$ ) und Endwert ( $q_f$ ) auf dem gleichen Niveau  $a$  liegen. Analoge Rechnungen liefern ein Ergebnis für den Fall  $q_i = \pm a$  und  $q_f = \mp a$ , nämlich

$$A = \sqrt{\frac{m\omega}{\pi\hbar}} e^{-\tau\omega/2} \sinh(\tau R e^{-S^{Inst}/\hbar}).$$

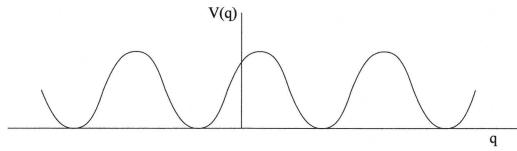
Um nun die untersten beiden Energieniveaus und damit die gesuchte Energiedifferenz  $\Delta E$  zu berechnen, schiebt man wieder eine vollständige Eins in die Definition des Pfadintegrals ein (analog zur Einfachmulde) und erkennt durch Exponentenvergleich die gesuchten Niveaus bzw. die Energiedifferenz:

$$\frac{\hbar\omega}{2} - \hbar R e^{-S^{Inst}/\hbar} \quad \text{sowie} \quad \frac{\hbar\omega}{2} + \hbar R e^{-S^{Inst}/\hbar}$$

$$\underline{\Delta E = 2\hbar R e^{-S^{Inst}/\hbar}}$$

## 5 Instantonen im periodischen Potential

Im Gegensatz zum letzten Kapitel taucht beim periodischen Potential ein Energiekontinuum auf. Die Berechnung der Energieniveaus verläuft analog zum Doppelmuldenpotential und ist im Fol-



**Abb. 6:** Eindimensionales periodisches Potential

genden aufgeführt.

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{\frac{m\omega}{\pi\hbar}} e^{-\tau\omega/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!^2} \left( \underbrace{e^{-S^{Inst}/\hbar} R \tau}_{\equiv Q} \right)^{2n} \\ &= \sqrt{\frac{m\omega}{\pi\hbar}} e^{-\tau\omega/2} \sum_{n,n'=0}^{\infty} \frac{Q^n}{n!} \frac{Q^{n'}}{n'!} \int_0^{\infty} \frac{d\theta}{2\pi} e^{i\theta(n-n')} \\ &= \sqrt{\frac{m\omega}{\pi\hbar}} e^{-\tau\omega/2} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(Qe^{i\theta})^n}{n!} \sum_{n'=0}^{\infty} \frac{(Qe^{-i\theta})^{n'}}{n'!} \\ &= \sqrt{\frac{m\omega}{\pi\hbar}} e^{-\tau\omega/2} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2\pi} \exp(Qe^{i\theta}) \exp(Qe^{-i\theta}) \\ &= \sqrt{\frac{m\omega}{\pi\hbar}} e^{-\tau\omega/2} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2\pi} \exp(2\tau R e^{-S^{Inst}/\hbar} \cos \theta) \end{aligned}$$

Man erkennt das aus der Summe ein Integral geworden ist, was für eine kontinuierliche Energiebasis spricht. Auch hier findet man über Exponentenvergleich die Energiewerte:

$$E(\theta) = \frac{\hbar\omega}{2} - 2\hbar R e^{-S^{Inst}/\hbar} \cos \theta$$

## 6 Zusammenfassung

Im Folgenden sind nocheinmal stichpunktartig alle wichtigen Fakten der Instantonlösungen aufgeführt.

- Instanton-Lösungen als nichttriviale, zeitlich lokalisierte Lösungen der euklidischen Bewegungsgleichung
- Interpolieren zwischen verschiedenen Zuständen
- Spielen bei Prozessen mit exponentiell kleiner Übergangsrate eine Rolle

- Tunnelprozesse
- Lebensdauer metastabiler Zustände in bestimmten Potentialen
- **QFT**

## **Literatur**

- [1] Das, Ashok: Field Theory, A Path Integral Approach, World Scientific, 1993
- [2] MacKenzie<sup>†</sup>, Richard: Path Integral Methods and Applications  
<http://lanl.arxiv.org/abs/quant-ph/0004090v1>
- [3] Münster, Gernot: Quantentheorie, de Gruyter, 2006