Seminar WS 07/08 Seminar zur Theorie der Teilchen und Felder

\- Pfadintegrale in Quantenmechanik und Feldtheorie -

Pfadintegraldarstellung des freien Skalarfelds

Matteo Serritiello

Münster, den 19. Februar 2008

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

In den vorangegangenen Vorträgen wurde der Pfadintegral-Formalismus bereits als alternativer Zugang zur Quantenmechanik eingeführt, welcher im Gegensatz zur kanonischen Darstellung der Quantenmechanik völlig ohne Operatoren auskommt. Dadurch ist man nicht mehr auf Kommutatoralgebra angewiesen und man muss sich auch nicht mehr im Hilbertraum bewegen.

2 Von N-Punktmechanik zur Feldtheorie

In Abbildung 1 zeigt eine Skizze einer schwingende Saite, auf welcher wir ,wie in der N-Punktmechanik üblich, i Stützstellen setzten. Somit kann die Auslenkung x am Ort i zur Zeit t betrachtet werden - $(x_i(t))$.

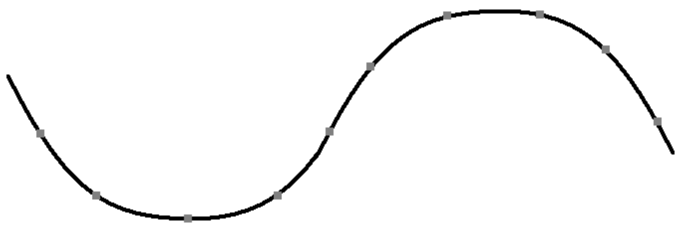

Abb. 1: Schwingende Saite, mit i Stützstellen.

Möchte man von dieser Betrachtungsweise nun zu einer Feldtheoretischen kommen, so muss man die Anzahl der Stützstellen, und somit i, gegen unendlichen laufen lassen. Man kann dann die bekannten Größen aus der N-Punktmechanik formal durch die in der folgenden Tabelle ersetzten.

N-Teilchenmechanik	Feldtheorie
Index der Teilchen: i	Kontinuierliche Variable für den Ort: x
Zeit: t	Ort und Zeit: x, t
$x_i(t)$	$\Phi(x,t)$
$L(x_i, \dot{x}_i)$	$\mathcal{L}(x_i, \dot{x}_i)$

Zur Lagrangedichte $\mathcal{L}$ ist anzumerken, dass:

$$L\left(x^0\right) = \int d^3x\mathcal{L} \quad (1)$$

$$S = \int d^4x\mathcal{L} \quad (2)$$

, wobei die Viererschreibweise verwendet wird und x^0 die Zeitkomponente mal c darstellt und die x^i-Komponenten mit $i \in 1, 2, 3$ den Raumkomponenten im $\mathcal{R}^3$ entsprechen.

Für die soeben eingeführten Feldgrößen, kann man wiederum das Hamilton´sche Prinzip verwenden. Dieses besagt, dass die Variation δS des Wirkungsfunktionals S identisch 0 sein muss.

Betrachte im Minkowski-Raum ein Raum-Zeit-Gebiet Ω, dessen Oberfläche $\Gamma\left(\Omega\right)$ ist. Weiterhin betrachte eine Variation von Φ, $\delta\Phi + \Phi$, für die gilt:

$$\delta\Phi = 0 \quad \text{auf} \quad \Gamma\left(\Omega\right) \quad (3)$$

Es gilt dann für die Variation δS:

$$0 = \delta S = \int_\Omega \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Phi}\,\delta\Phi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\mu\Phi\right)}\,\delta\left(\partial_\mu\Phi\right) \right] d^4x \quad (4)$$

$$= \int_\Omega \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Phi}\,\delta\Phi - \partial_\mu \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\mu\Phi\right)}\,\delta\Phi + \partial\mu \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\mu\Phi\right)}\,\delta\Phi \right) \right] d^4x \quad (5)$$

$$= \int_\Omega \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Phi} - \partial_\mu \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\mu\Phi\right)} \right] \delta\Phi d^4x + \underbrace{\int_{\Gamma(\Omega)} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\mu\Phi\right)}\,\delta\Phi\, d\sigma_\mu}_{=0} \quad (6)$$

Da Gleichung (6) für beliebige Variationen $\delta\Phi$ gleich 0 sein muss, folgt daraus die Euler-Lagrange-Gleichung für die Lagrandichte $\mathcal{L}$:

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Phi} - \partial_\mu \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\mu\Phi\right)} = 0 \quad (7)$$

Wie wir bereits wissen beschreibt die Klein-Gordon-Gleichung als klassische Gleichung spinlose Teilchen.
Die einfachste Lorentzinvariante Lagrangedichte, die uns mit Gleichung **??** zu der Klein-Gordon-Gleichung führt, lautet:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left(\partial_\mu\, \Phi\partial^\mu\, \Phi - m^2\Phi^2\right) \quad (8)$$

$$\Rightarrow \quad \text{Klein-Gordon-Gleichung:} \quad \left(\partial_\mu\partial^\mu + m^2\right)\Phi = 0 \quad (9)$$

Bem:

- Die Lagrangedichte und KGG sind jeweils ohne Wechselwirkung, da in diesem Vortrag nur freie skalare Felder Gegenstand des Vortrags sind.
- Die oben angegebene Lagrangedichte führt zum reellen KGF, würde man jeweils die ersten Φ durch Φ^+ $\left(\rightarrow \mathcal{L} = \frac{1}{2}\left(\partial_\mu\, \Phi^+\partial^\mu\, \Phi - m^2\Phi^+\Phi\right)\right)$ so wäre dies die passende Lagrangedichte, die das komplexe KGF liefert und zur Beschreibung von elektrisch geladenen Spinlosen Teilchen geeignet ist.

3 Erinnerung: kanonische Quantisierung

Die Hamiltondichte ist mit der Lagrangedichte durch Legendretransformation verknüpft:

$$\mathcal{H}\left(\Pi,\Phi\right) \;-\; \Pi\left(x\right)\partial_\mu\Phi \;=\; \mathcal{L}\left(\Phi,\partial_\mu\Phi\right) \quad . \tag{10}$$

Damit lautet der Hamiltonian H für ein skalares wechselwirkungsfreies Feld:

$$H \;=\; \int d^3x\mathcal{H} \;=\; \int d^3x\left(\Pi\left(x\right)\;\partial_\mu\Phi\right) \;=\; \frac{1}{2}\Pi^2+\left(\nabla\Phi\right)^2+\frac{1}{2}m\Phi^2 \quad . \tag{11}$$

Dabei ist $\Pi(x)$ das Konjugierte Impulsfeld, welches definiert ist als:

$$\Pi\left(x\right) \;=\; \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial0\Phi\right)}=\partial_0\Phi \quad . \tag{12}$$

Damit können wir nun die kanonische Quantisierung durchführen, indem wir Φ,Π,H durch Operatoren im Heisenbergbild ersetzten und noch folgende Kommutatorrelationen fordern.

$$\left[\hat{\Phi},\hat{\Phi}\right] \;=\; \left[\hat{\Pi},\hat{\Pi}\right] \;=\; \left[\hat{\dot{\Phi}},\hat{\dot{\Phi}}\right] \;=\; 0\left[\hat{\Phi},\hat{H}\right] \;=\; i\hbar\,\delta\left(x-x'\right) \tag{13}$$

4 Pfadintegralquantisierung

Aus den vorherigen Vorträgen, insbesondere dem einführenden Vortrag, ist uns bereits die Form des Pfadintegrals für ein Teilchen bekannt.

$$\int Dx\exp\frac{i}{\hbar}\;S\left(x\right) \;=\; <\;x_f,t_f|x_i,t_i\;> \tag{14}$$

Dabei ist die Wirkung $S\left(x\right) \;=\; \int_{t_i}^{t_f}dt\;L\left(x,\dot{x}\right)$.

Man kann dieses nun im ersten Schritt auf ein N-Teilchensystem, bzw. ein 1-Teilchensystem mit N Freiheitsgraden verallgemeinern. Der entsprechende Ausdruck für das Pfadintegral lautet dann:

$$\int Dx^\alpha\exp\frac{i}{\hbar}\;S\left(x^\alpha\right) \tag{15}$$

, wobei $\alpha\in\left(1,2,...,N\right)$ die Freiheitsgrade des Systems widerspielgelt. Die Wirkung $S\left(x^\alpha\right)$ ist dabei gegeben als:

$$S\left(x^\alpha\right) \;=\; \int_{t_i}^{t_f}dt\;L\left(x^\alpha,\dot{x}^\alpha\right) \tag{16}$$

Wenn wir nun den formalen Ersetzung folgen, welche wir zu Anfang in Tabelle 1 eingeführt haben, so können wir aus den selben Überlegungen aus Gleichung 15 das Pfadintegral für eine Feldtheorie formal hinschreiben.

$$\int D\Phi \exp \frac{i}{\hbar}\, S\left(\Phi\right) \tag{17}$$

Es stellt sich nun die Frage wie das Integralmaß $D\Phi$ zu verstehen ist. Dazu erinnern wir uns an die Herleitung der Pfadintegrale, dort wurde unter anderem die Zeit in Intervalle unterteilt, so dass $\delta \;=\; \frac{T}{N}$ im Limes $N \to \infty$.

Wir werden nun ähnlich vorgehen:
betrachte eine Intervall der Länge L, der Index x bezeichnet einen Vierervektor, wie in der zuvor benutzten Schreibweise.

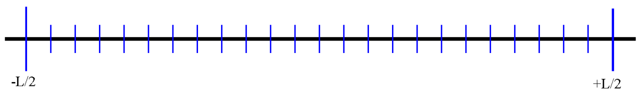

Abb. 2: N äquidistante Abschnitte mit $\overline{N}\epsilon \;=\; L$

Man unterteilt nun, wie in Abbildung 2 zu sehen das Intervall in $\overline{N}$ äquidistante Abschnitte, wobei gelten soll, dass $\overline{N}\epsilon \;=\; L$. Damit kann man die Position x_m identifizeiren als $x_m \;=\; -\frac{L}{2} + m\,\epsilon$.
Desweiteren kann man nun das Feld an der Stelle $\Phi\left(x_m\right) \;=\; \Phi_m$ betrachten, wodurch wir das Integralmaß folgendermaßen verstehen können:

$$\int D\Phi \;=\; \lim_{L\to\infty}\; \lim_{\overline{N}\to\infty \epsilon\to 0^{+} \overline{N}\,\epsilon \,=\, L} \int \prod_m d\Phi_m \tag{18}$$

5 Erzeugendes Funktional

Aus vorherigen Beiträgen ist uns schon das Erzeugende Funktional bzw. das Vakuumsfunktional $Z\left(J\right)$ bekannt.

$$Z\left(J\right) \;=\; <\; 0\,|\,0\; >_J \;\;=\; N \int D\Phi\; \exp \frac{i}{\hbar}\; S(\Phi, J) \tag{19}$$

Dabei ist J eine erzeugende Funktion, welche an Φ koppelt, man könnte sich J z.B. als Störung eines gegeben Systems vorstellen, wie etwa ein externes Magnetfeld, welches man an und aus schaltet.
Die Wirkung $S\left(\Phi, J\right)$ mit der erzeugenden Funktion J lautet:

$$S\left(\Phi, J\right) \;=\; S\left(\Phi\right) + \int d^4x\; J\left(\boldsymbol{x}, t\right) \Phi\left(\boldsymbol{x}, t\right) \tag{20}$$

$$S\left(\Phi\right) \;=\; \int \frac{1}{2}\partial_\mu \Phi \partial^\mu \Phi - \frac{1}{2} m^2 \Phi^2\; d^4x \tag{21}$$

Eine wesentliche Eigenschaft des erzeugenden Funktionals ist es, dass die Funktionalableitungen nach der erzeugenden Funktion J die Vakuumkorrelationsfunktionen liefern, bzw. die n-Punkt-Funktion.

- 1-Punkt Funktion :

$$< \ 0 \,|\Phi(x)|\, 0 \ > \ = \ \frac{-i\,\hbar}{Z(J)} \left. \frac{\delta Z(J)}{\delta J(x)} \right|_{J=0} \tag{22}$$

- 2-Punkt Funktion :

$$< \ 0 \,|T\left[\Phi(x)\,\Phi(y)\right]|\, 0 \ > \ = \ \frac{(-i\,\hbar)^2}{Z(J)} \left. \frac{\delta^2 Z(J)}{\delta J(x)\,\delta J(y)} \right|_{J=0} \tag{23}$$

Um den Feynman Propagator für das freie Skalarfeld zu erhalten, welcher der zweiten Funktionalableitung des erzeugenden Funktionals entspricht, muss man also lediglich das $Z(J)$ für die in Gleichung 8 gefundene Lagrangedichte errechnen und dessen erste und zweite Funktionalableitung bilden.

6 Berechnung von $Z(J)$ für die Lagrangedichte des K-G-Feldes

Setzten wir also die Lagrangedichte aus Gleichung 8 in die Wirkung des erzeugenden Funktionals Gleichung 19 ein.

$$\begin{aligned}
Z(J) &= N \int D\Phi \ \exp \frac{i}{\hbar} \int \left[\frac{1}{2}\, \partial_\mu \, \Phi(x)\ \partial^\mu \, \Phi(x) - \frac{1}{2} m^2 \Phi^2(x) + J(x)\,\Phi(x) \right] d^4x && (24)\\
&= N \int D\Phi \ \exp \frac{i}{\hbar} \int \left[-\frac{1}{2}\Phi(x) \underbrace{\left(\partial_\mu \ \ \partial^\mu \ + m^2 \right)}_{=:A} \Phi(x) + J(x)\,\Phi(x) \right] d^4x && (25)\\
&= \underbrace{N \int D\Phi \ \exp \frac{i}{\hbar} \int \left[-\frac{1}{2}\Phi(x) \ A\ \Phi(x) + J(x)\,\Phi(x) \right] d^4x}_{=:I} && (26)
\end{aligned}$$

Das Integral I stellt ein allgemeines Gaußsches Integral dar, für welches wir die Lösung benutzten können:

$$I \ = \ \left(det\,(A)\right)^{-\frac{1}{2}} \exp \frac{-i}{2\hbar} \int J A^{-1} J \tag{27}$$

Wir fordern nun, dass $Z(J=0)$ zu 1 normiert ist, können wir uns die Berechnung der Determinante sparen, denn wir erhalten die Bedingung :

$$Z(0) \ = \ N\left(det\,(A)\right)^{-\frac{1}{2}} \exp \frac{-i}{2\hbar} \int 0 A^{-1} 0 = 1 \Rightarrow \quad N \ = \ det\,(A)^{\frac{1}{2}} \quad , \tag{28}$$

wodurch sie sich beim einsetzten, der Bedingung für N und der Lösung für I, in Gleichung 26 gegenseitig aufheben.

$$Z(J) \;=\; \exp\frac{-i}{2\hbar}\int J(x)\,A^{-1}J(y)dxdy \tag{29}$$

Zu berechnen ist demnach nur A^{-1}, welcher eine abkürzende Schreibweise für den K-G-Operator ist und sich deswegen als Matrix darstellen lässt.
Um nun das inverse dieses Operators bzw. dieser Matrix zu finden, werden wir die Greensche Funktion benutzten, welche in unserem Fall durch die folgende Gleichung definiert ist:

$$\left(\partial_\mu\ \partial^\mu\ + m^2\right)\ G_F(x-y) \;=\; A\,G_F(x-y) \;=\; -\,\delta(x-y)\quad . \tag{30}$$

Man erkennt also sofort, dass die Greensfunktion per Definition unser gesuchter Operator A^{-1} ist. Wir können Gleichung 30 lösen, indem wir sie Fouriertransformieren und im Fourierraum lösen und anschließend Rücktransformieren.

$$G_F(x-y) \;=\; \int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\,\widetilde{G}_F(k)\ \exp -ik(x-y) \tag{31}$$

$$\delta^4 \;=\; \int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\ \exp -ik(x-y) \tag{32}$$

Mit den Fouriertransformationen aus Gleichung 31 und 32 erhalten wir aus Gleichung 30:

$$\left(m^2+\ \partial_\mu\ \partial^\mu\ \right)\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\,\widetilde{G}_F(k)\ \exp -ik(x-y) \;=\; -\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\ \exp -ik(x-y) \tag{33}$$

Dank der Fouriertransformation können wir die Ableitungen „ $\partial_\mu\ \partial^\mu$ “ ausführen und danach nach $\widetilde{G}_F(k)$ auflösen.

$$\widetilde{G}_F(k) \;=\; \frac{1}{(2\pi)^2}\,\frac{1}{k^2-m^2} \tag{34}$$

Dies stellt die Lösung für $\widetilde{G}_F$ im Fourierraum dar, also transformieren wir wieder zurück und erhalten die Lösung für G_F:

$$G_F(x-y) \;=\; \int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{1}{k^2-m^2}\exp ik(x-y) \tag{35}$$

Dieses Integral kann man in dieser Form jedoch nicht auswerten, da man über alle k integrieren muss und es somit zwangsläufig zu Polstellen bei $|k| = |m|$ auftreten.
Um dieses Problem zu umgehen, kann man sich entweder eine andere Integrationskontur suchen oder die Pole um einen Konvergierenden Faktor verschieben. Wir bedienen uns der zweiten Methode, wodurch sich folgende Form für die freie Greensfunktion ergibt.

$$G_F\,(x-y) \;=\; \lim_{\epsilon\to 0^+}\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{1}{k^2-m^2+i\epsilon}\exp ik\,(x-y) \tag{36}$$

Nun da uns A^{-1}, also G_F, vorliegt kann dies in Gleichung 29 eingesetzt werden.

$$Z\,(J) \;=\; \exp\frac{-i}{2\hbar}\int J\,(x)\,G_F\,(x-y)\,J\,(y)dxdy \tag{37}$$

Als letztes bleiben nun noch die erste und zweite Funktionalableitung von $Z(J)$, welche berechnet werden müssen.

$$<\ 0\,|\Phi\,(x)\,|\,0\ > \;=\; \frac{-i\,\hbar}{Z\,(J)}\,\frac{\delta\exp\frac{-i}{2\hbar}\int J\,(x)\,G_F\,(x-y)\,J\,(y)dxdy}{\delta J\,(x)}\Bigg|_{J=0} \tag{38}$$

$$= \frac{-i\,\hbar}{Z\,(J)}\left(\exp\frac{-i}{2\hbar}\int J\,(x)\,G_F\,(x-y)\,J\,(y)dxdy\left[\frac{-i}{2\hbar}\int G_F\,(x-y)\,J\,(y)\,dy+\frac{-i}{2\hbar}\int J\,(x)\,G_F\,(x-y)\,dx\right]\right)\Bigg|_{J=0} = 0 \tag{39}$$

$$<\ 0\,|T\,[\Phi\,(x)\,\Phi\,(y)]\,|\,0\ > \;=\; (-i\,\hbar)^2\,\frac{\delta^2\exp\frac{-i}{2\hbar}\int J\,(x)\,G_F\,(x-y)\,J\,(y)dxdy}{\delta J\,(x)\,\delta J\,(y)}\Bigg|_{J=0} \tag{40}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{(-i\,\hbar)^2}{Z\,(J)}\left(\exp\frac{-i}{2\hbar}\int J\,(x)\,G_F\,(x-y)\,J\,(y)dxdy\left[\frac{-i}{2\hbar}\int G_F\,(x-y)\,J\,(y)\,dy+\frac{-i}{2\hbar}\int J\,(x)\,G_F\,(x-y)\,dx\right]\right)\Bigg|_{J=0}\\
&\qquad +\frac{(-i\,\hbar)^2}{Z\,(J)}\left(\exp\frac{-i}{2\hbar}\int J\,(x)\,G_F\,(x-y)\,J\,(y)dxdy\left[\frac{-i}{2\hbar}G_F\,(x-y)+\frac{-i}{2\hbar}G_F\,(x-y)\right]\right)\Bigg|_{J=0}
\end{aligned}$$

$$<\ 0\,|T\,[\Phi\,(x)\,\Phi\,(y)]\,|\,0\ > \;=\; i\,\hbar\,G_F\,(x-y) \tag{41}$$

Es ist also festzuhalten, dass der Propagator von einem Raum-Zeitpunkt x zu einem anderen Raum-Zeitpunkt y, für das Wechselwirkungsfreie skalare Klein-Gordon-Feld direkt Proportional zur freien Greensfunktion $G_F\,(x-y)$ ist, welche über das Integral in Gleichung 36 explizit berechnet werden kann.

Literatur

[Muenster] Gernot, Münster: Quantentheorie, de Gruyter, 2006

[Das] Ashok, Das: Field Theory, A Path Integral Approach, World Scientific, 1993