<u>Darstellungstheorie der SO(3) und SU(2)</u>

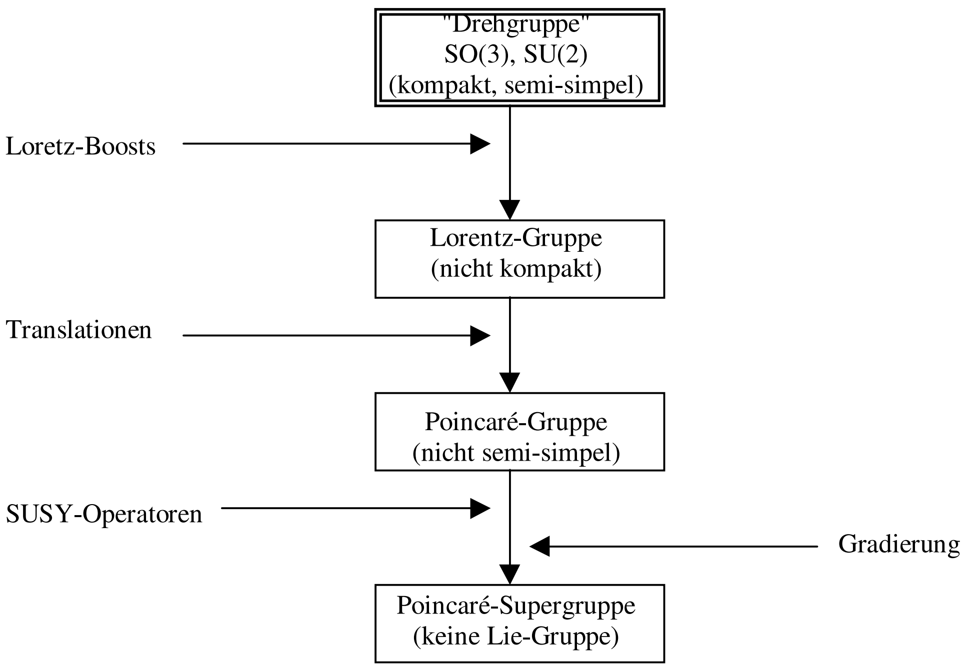
Kevin Johnson
kevin@uni-muenster.de

<u>Grundlagen:</u>

Erinnerung:

<u>Definition "Darstellung"</u>
Eine Darstellung einer Gruppe G ist eine homomorphe Abbildung von dieser Gruppe auf eine Gruppe nichtsingulärer linearer Operatoren auf einem Vektorraum L.
Ist diese Abbildung isomorph, so spricht man von einer "treuen" oder "getreuen" Darstellung.
Die Dimension der Darstellung ist die Dimension des Vektorraums L.
Zwei Darstellungen sind äquivalent $(D(\varphi, L) \Leftrightarrow D(\varphi', L'))$, wenn eine Basiswechsel-Matrix M existiert, so daß gilt $\forall g \in G : \varphi'(g) = M^{-1}\varphi(g)M$.

Wieso sind gerade SO(3) und SU(2) interessant?



Die Betrachtung der Drehgruppen SO(3) bzw. SU(2) ist noch relativ einfach, da diese Gruppen kompakte, semi-simple Lie-Gruppen sind. Durch hinzufügen von Loretz-Boosts, Translationen und SUSY-Operatoren und schließlich Gradierung kommt man dann zu der Poincaré-Supergruppe, die die Supersymmetrie beschreibt.

Was bedeutet "SO(3)" und "SU(2)"?

SO(3) und SU(2) sind Untergruppen der regulären Matrizen:[1]

$$SO(3) := \{A \in GL(3,R) \mid A^T A = 1 \wedge \det(A) = 1\}$$

$$SU(2) := \{A \in GL(2,C) \mid A^T A = 1 \wedge \det(A) = 1\}$$

Es sind also die "speziellen orthogonalen 3x3-Matrizen" bzw. die "speziellen unitären 2x2-Matrizen.

Wieso werden die Gruppen nach einer ihrer Darstellungen benannt?

Satz von Ado:
Jede semi-simple Lie-Gruppe ist isomorph zu einer Untergruppe der regulären Matrizen
Diese Untergruppe der regulären Matrizen nennt man auch "definierende Darstellung" der Gruppe.

Diese Darstellung der Gruppe durch reguläre Matrizen ist isomorph und daher treu/getreu.

Definierende Darstellung der SO(3)

Aus den Bedingungen der Orthogonalität und Unimodularität[2] folgt, daß 3 Matrixeinträge frei wählbar sind.
Als Parameter wählen wir $\varphi^1, \varphi^2, \varphi^3$. Sie können als Winkel von drei nacheinander ausgeführten Drehungen um die Achsen oder auch als Euler-Winkel der Raumdrehung gewählt werden.
Wir betrachten zunächst kleine Drehungen, d.h. Gruppenelemente, die nur wenig vom Einselement entfernt sind.
Zu anderen Gruppenelementen gelangt man durch Zusammensetzung solcher "kleinen" Operatoren.
(Man verwendet also die Gruppeneigenschaft und die Möglichkeit, auf der Gruppe Infinitesimalrechnung zu betreiben).
Für eine kleine Drehung schreiben wir:

$$R = 1 + \Omega$$

wobei die Elemente der Matrix Ω klein von erster Ordnung sein sollen, so daß die Quadrate der Matrixeinträge vernachlässigbar sind. Die Orthogonalität

$$R^T R = 1$$

verlangt dann

$$\Omega + \Omega^T = 0$$

Ω ist eine infinitesimale antisymmetrische Matrix und kann in der Form

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & -\varphi^3 & \varphi^2 \\ \varphi^3 & 0 & -\varphi^1 \\ -\varphi^2 & \varphi^1 & 0 \end{pmatrix} = \vec{\varphi}\vec{\tau}$$

geschrieben werden mit den sogenannten **"infinitesimalen Generatoren"**

$$\tau^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \tau^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \tau^3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Sie sind die Generatoren von infinitesimalen Drehungen um die drei Achsen.

Die endlichen Gruppenelemente lassen sich nun gewinnen aus

$$R(\varphi) = \exp(\tau^i \varphi^i)$$

---

[1] GL(3,R) bedeutet generelle lineare 3x3-Matrizen über den reellen Zahlen
GL(2,C) bedeutet generelle lineare 2x2-Matrizen über den komplexen Zahlen

[2] Det(A)=1

Durch Linearisierung kommt man zurück zu den infinitesimalen Generatoren, die allgemein wie folgt definiert sind:

Definition "infinitesimale Generatoren"

$$\tau^i = \frac{\partial R(\ldots\varphi^i\ldots)}{\partial \varphi^i}\bigg|_{\varphi^j=0}$$

Mit den infinitesimalen Generatoren kann man die Elemente der Lie-Gruppe in der Nähe der Identität beschreiben. Wenn die Lie-Gruppe zusammenhängend[3] ist, kann man durch die Exponentialfunktion alle Gruppenelemente beschreiben.
Die infinitesimalen Generatoren und deren Vertauschungsrelationen (die Lie-Algebra) legen die Gruppe vollständig fest.

*Wie sieht also die **Lie-Algebra** der SO(3), bezeichnet mit so(3), aus?*

Um die Vertauschungsrelationen zu finden, schreiben wir die Generatoren wie folgt:

$$(\tau^i)^{jk} = -\varepsilon^{ijk}$$

Damit sind die Kommutatoren

$$\begin{aligned}
\left[\tau^i, \tau^j\right]^{lm} &= \varepsilon^{ilk}\varepsilon^{jkm} - \varepsilon^{jlk}\varepsilon^{ikm} \\
&= \delta^{im}\delta^{lj} - \delta^{jm}\delta^{li} \\
&= -\varepsilon^{ijk}\varepsilon^{klm}
\end{aligned}$$

$$\left[\tau^i, \tau^j\right] = \varepsilon^{ijk}\tau^k$$

Die Generatoren sind also durch die Strukturkonstanten festgelegt. Eine solche Darstellung nennt man "adjungierte Darstellung".

Satz:
Jede kompakte Lie-Gruppe besitzt mindestens eine unitäre Darstellung.

Um allgemeingültige Aussagen zu treffen, gehen wir zu einer unitären Darstellung über. Dazu müssen wir die Generatoren hermitesch wählen:

$$J^i = i\tau^i$$

$$R(\vec{\varphi}) = \exp(-i\vec{\varphi}\cdot\vec{J})$$

Wir erhalten die **Lie-Algebra so(3)**

$$\left[J^i, J^j\right] = i\varepsilon^{ijk}J^k$$

(Dies ist die Algebra der quantenmechanischen Drehimpulsoperatoren)

Die **Grundaufgabe der Darstellungstheorie** ist es, die **irreduziblen Darstellungen** der Gruppe zu finden.
Ausgehend von der Lie-Algebra kann man auf rein algebraischem Weg die Eigenwerte und zugehörigen Eigenräume finden, die mit den Generatoren in Verbindung stehen.
Man bedient sich der Technik, möglichst viele Generatoren gleichzeitig zu diagonalisieren, und stellt fest, daß die Eigenräume einen Darstellungsraum für die irreduziblen Darstellungen der Gruppe bilden.

---

[3] Zusammenhängend bedeutet nicht einfach zusammenhängend.
Zusammenhängend bedeutet, daß die Elemente durch einfach zusammenhängende Wege miteinander verbunden werden können. Bei einfach zusammenhängende Gruppen können zwei verschiedene Wege einfach zusammenhängend auf einen Weg zusammengezogen werden.

Zunächst einige Begriffe und Sätze:

Definition "Rang einer Algebra"
Der Rang einer Algebra ist die maximale Anzahl von gleichzeitig miteinander kommutierenden Generatoren.

Die Lie-Algebra so(3) hat also den Rang 1.

Definition "Casimir-Operator"
Casimir-Operatoren sind Funktionen der Generatoren, die mit allen Generatoren vertauschen.

z.B. so(3): $\vec{J}^2 = J^1 J^1 + J^2 J^2 + J^3 J^3$, $\left[\vec{J}^2, J^i\right] = 0$; $i = 1,2,3$

Satz von Racah:
Die Anzahl von linear unabhängigen Casimir-Operatoren ist gleich dem Rang der Lie-Algebra.

Bei so(3) haben wir mit $\vec{J}^2$ also bereits alle (linear unabhängigen) Casimir-Operatoren.

Satz:
Die irreduziblen Darstellungen einer semi-simplen Lie-Algebra werden durch die Eigenwerte der Casimir-Operatoren klassifiziert.

Für die Berechnung der Eigenwerte der Casimir-Operatoren verweise ich auf das Skript "Quantentheorie I" von Prof. Münster (Kap 9.3 Eigenwerte des Drehimpuls).

Wenn man die Bezeichnung $\left|j,m\right\rangle$ für einen normierten Eigenvektor von $\vec{J}^2$ und J^3 wählt, so daß

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{J}^2\left|j,m\right\rangle &= j(j+1)\left|j,m\right\rangle \\ J^3\left|j,m\right\rangle &= m\left|j,m\right\rangle \end{aligned}}$$

dann kann

$$j \in \left\{0, \tfrac{1}{2}, 1, \tfrac{3}{2}, 2, \ldots\right\}$$
$$m \in \left\{-j, -j+1, \ldots, j\right\}$$

sein.

Den Eigenwert j des Casimir-Operators, also den größten vorkommenden Wert für m, bezeichnet man als **"höchstes Gewicht"**.
Die Darstellungen der Lie-Algebra sind also die Eigenräume, die sich anhand der Eigenwerte des Casimir-Operators (der höchsten Gewichte) aufzählen lassen. Ihre **Dimension** ist 2j+1.

Betrachten wir nun die einfachsten Fälle:

1. j=0 (eindimensional) , **triviale Darstellung.**
   $\vec{J}^2 = 0$, $R(\vec{\varphi}) = \exp(-i\vec{\varphi} \cdot \vec{J}) = 1$

2. J=1 (dreidimensional) **"Tensordarstellung"**

Der Darstellungsraum wird aufgespannt von $\{|1,1\rangle, |1,0\rangle, |1,-1\rangle\}$

$$J^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad J^+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad J^- = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow J^1 = \tfrac{1}{2}(J^+ + J^-) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad J^2 = \tfrac{1}{2i}\left(J^+ - J^-\right) = \frac{1}{i\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Diese Darstellung ist eng mit dem physikalischen Raum verbunden. Durch die Ähnlichkeitstransformation

$$S^{-1} J^i S = i\tau^i \qquad \text{mit} \qquad S = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 & i & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & i & 0 \end{pmatrix}$$

gelangt man zu der definierenden Darstellung von SO(3) zurück.

Die ganzzahligen irreduziblen Darstellungen heißen allgemein "Tensordarstellungen".

Bemerkung: Die Zustände $|\, j, m\rangle$ sind bei Tensordarstellungen Eigenzustände des Differentialoperators $\vec{L} = \vec{X} \times \frac{\hbar}{i} \vec{\nabla}$ (Drehimpulsoperator der Quantenmechanik).

In der Ortsdarstellung sind die Zustände die Kugelflächenfunktionen $|\, j, m\rangle = Y_j^m$.

3. j=1/2 (zweidimensional) **"Spinordarstellung"**

Der Darstellungsraum wird aufgespannt von $\{|\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\rangle, |\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}\rangle\}$

$$J^3 = \tfrac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad J^+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad J^- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow J^1 = \tfrac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad J^2 = \tfrac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

d.h.: $\vec{J} = \tfrac{1}{2}\vec{\sigma}$ (Pauli'sche Spinmatrizen)

Generell versteht man unter Darstellungen mit halbzahligem j "Spinordarstellungen".

Damit haben wir alle irreduziblen Darstellungen der Lie-Algebra so(3) gefunden und kategorisiert.
Wie sich noch zeigen wird, sind allerdings nicht alle Darstellungen der Lie-Algebra so(3) auch Darstellungen der Lie-Gruppe SO(3).
Aus der definierenden Darstellung der SO(3) (die eine Tensordarstellung mit dim=3 ist) lassen sich alle Tensordarstellungen gewinnen, nicht jedoch "Spinordarstellungen" der Lie-Gruppe SO(3).

Darstellungen der SU(2)

Für die definierende Darstellung betrachten wir komplexe unitäre unimodulare 2x2-Matrizen:

$$U = \begin{pmatrix} a & b \\ -b^* & a^* \end{pmatrix} \quad \text{mit } |a^2| + |b^2| = 1$$

Dies sind zwei komplexe Zahlen und eine Bedingung, daher gibt es 3 freie (reelle) Parameter (wie bei SO(3)).
Die Generatoren sind die halben Pauli-Matrizen:

$$U(\vec{\varphi}) = \exp\left(-i\varphi^i \tfrac{1}{2}\sigma^i\right)$$

Die Definierende Darstellung ist also eine Spinordarstellung.

Die Lie-Algebra su(2) der Lie-Gruppe SU(2) ist

$\boxed{\left[\frac{\sigma^i}{2}, \frac{\sigma^j}{2}\right] = i\varepsilon^{ijk}\,\frac{\sigma^k}{2}}$ Erinnerung: so(3): $\left[J^i, J^j\right] = i\varepsilon^{ijk} J^k$

d.h. die Lie-Algebren **su(2) und so(3) sind gleich.**

Da wir die irreduziblen Darstellungen der so(3) bereits kennen, sind uns damit also auch die irreduziblen Darstellungen der su(2) bekannt.

Wie sehen nun aber die irreduziblen Darstellungen der Lie-Gruppen SO(3) und SU(2) aus?

$$R(\vec{\varphi}) = \exp(-i\vec{\varphi}\cdot\vec{J}) \qquad U(\vec{\varphi}) = \exp\left(-i\varphi^j \tfrac{1}{2}\sigma^j\right)$$

Trotz gleicher Lie-Algebren unterscheiden sich die Gruppenelemente von SO(3) und SU(2) durch den Faktor 1/2 im Exponenten, was enorme Konsequenzen hat.
Für eine Drehung um einen Winkel $\varphi = 2\pi$ folgt

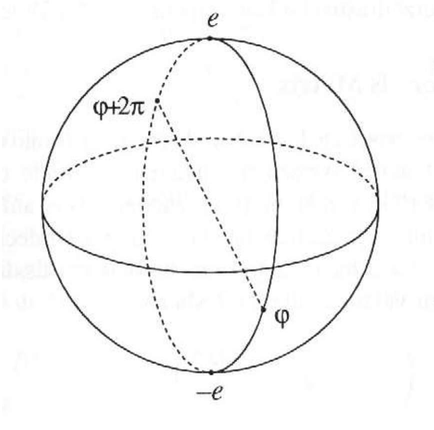
$$R(2\pi) = R(0) = 1 \qquad \text{aber} \qquad U(2\pi) = -1 \quad ; \quad U(4\pi) = U(0) = 1$$

Jedem Element der SO(3) $R(\varphi)$ sind zwei Elemente der SU(2) $U(\varphi)$ und $U(\varphi + 2\pi)$ zugeordnet.
Im Gegensatz zur 2π-Periodizität der SO(3) besitzt die SU(2) eine 4π-Periodizität.

*Betrachten wir den **Parametrerraum** der SU(2):*
Schreibt man die Matrixeinträge von U als $a = u + iv$ und $b = x + iy$ so ergibt sich aus der Unimodularitätsbedingung $\left|a^2\right| + \left|b^2\right| = 1$ die Gleichung einer (Hyper-)Kugeloberfläche im R^4:

$$u^2 + v^2 + x^2 + y^2 = 1$$

Die stereographische Projektion dieser (Hyper-)Kugeloberfläche sieht unter Weglassung einer Dimension so aus:



Jedem Punkt auf der Kugeloberfläche wird ein-ein-deutig eine Matrix U zugeordnet.
Dieser sogenannte "Parameterraum" von SU(2) ist einfach zusammenhängend: Je zwei Wege zwischen zwei Punkten lassen sich einfach zusammenhängend ineinander überführen.
Die Punkte φ und φ+2π liegen diametral.
Bei SO(3) sind diese Punkte identisch. Man kann sich den Parameterraum von SO(3) als die obere Halbkugel vorstellen, bei der diametrale Punkte auf dem Äquator identisch sind.
Man sagt: SU(2) ist Überlagerungsgruppe von SO(3).

> **<u>Satz:</u>**
> Jede Lie-Algebra ist Lie-Algebra genau einer einfach zusammenhängenden Lie-Gruppe. Jede andere Lie-Gruppe mit der gleichen Lie-Algebra, die n-fach zusammenhängt[4] , wird von der einfach zusammenhängenden Lie-Gruppe n-fach überlagert.

[4] N-fach zusammenhängend bedeutet, daß es n inäquivalente (d.h. nicht einfach zusammenhängend ineinander überführbare) Wege zwischen zwei Punkten gibt.

SO(3) wird von SU(2) zweifach überlagert.[5]

Die Lie-Gruppen SO(3) und SU(2) sind lokal um die Identität isomorph. Das folgt aus der Gleichheit ihrer Lie-Algebren. Global zerfallen allerdings die irreduziblen Darstellungen in Tensordarstellungen und Spinordarstellungen.
Beide Arten sind Darstellungen der SU(2), aber nur die Tensordarstellungen sind Darstellungen der SO(3). Manchmal spricht man von "Spinordarstellungen der SO(3)" als sogenannten "mehrdeutigen Darstellungen". Mathematisch korrekt ist allerdings, von einer "Darstellung einer Überlagerungsgruppe" zu sprechen.

Lie-Algebra der Elementarteilchen (SU(3))

Für Mehrteilchensysteme, in denen mehrere Teilchen derselben Sorte auftauchen können, führt man den Formalismus der "zweiten Quantisierung" ein.
Man definiert Erzeugungsoperatoren $\{a_j^+\}$ und Vernichtungsoperatoren $\{a_j\}$ und einen Teilchenzahloperator

$N = \sum_{j=1}^{d} a_j^+ a_j$ (d: Anzahl der verschiedenen Teilchensorten)

Zunächst waren nur die Nukleonen bekannt, und man begnügte sich mit der Isospin-Algebra.

Isospin-Algebra

Sei nur ein Teilchen vorhanden: $N = a_p^+ a_p + a_n^+ a_n = 1$
Man definiert:

$\tau_+ := a_p^+ a_n$ erhöht Isospin um 1

$\tau_- := a_n^+ a_p$ erniedrigt Isospin um 1

$\tau_0 := \frac{1}{2}\left(a_p^+ a_p - a_n^+ a_n\right)$

und erhält die Lie-Algebra

$$[\tau_0, \tau_\pm] = \pm\tau_\pm$$
$$[\tau_+, \tau_-] = 2\tau_0$$
(isomorph zur so(3) mit Leiteroperatoren)

und den Casimir-Operator

$$\vec{\tau}^{\,2} = \tau_0^{\,2} + \tau_0 + \tau_-\tau_+$$

Seine Multipletts beschreiben die Elementarteilchen:

$$|T, T_0\rangle \quad ; \quad T = 0, \tfrac{1}{2}, 1, \tfrac{3}{2}, \ldots \quad ; \quad T_0 = -T, \ldots, T$$

Das Dublett sind die Nukleonen p und n, mit T=1/2
Das Triplett mit T=1 beschreibt gerade die Pionen π^-, π^0, π^+

Aber: Die Isospin-Algebra reicht nicht aus, um alle Elementarteilchen zu erfassen. Sie ist aber Subalgebra einer höheren Lie-Algebra, nämlich der der

SU(3) *(Gell-Mann : "The eightfold way")*

Gell-Mann führte bei seiner Beschreibung der Elementarteilchen die sogenannte "Hyperladung" Y als neue Quantenzahl ein. Hierdurch werden die Multipletts zweidimensional.

Die Generatoren der SU(3) bestehen aus Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren von 3 Fundamentalteilchen

$$\{a_1^+, a_1, a_2^+, a_2, a_3^+, a_3\}$$

---

[5] Man betrachte dazu zwei beliebige Punkte auf der oberen Halbkugel (dem Parameterraum von SO(3)) und verbinde sie einmal durch einen "direkten" Weg und einmal durch einen Weg, der vom ersten Punkt zum Äquator führt und diametral gegenüber wieder in den Parameterraum "eintritt", bevor er den zweiten Punkt erreicht. Diese zwei Wege sind inäquivalent.

Man definiert nach Gell-Mann:

$$T_+ := a_1^+ a_2 \qquad T_- := a_2^+ a_3$$
$$V_+ := a_1^+ a_3 \qquad V_- := a_3^+ a_1$$
$$U_+ := a_2^+ a_3 \qquad U_- := a_3^+ a_2$$
$$Y := a_1^+ a_1 + a_2^+ a_2 - 2a_3^+ a_3 \qquad T_3 := \tfrac{1}{2}(a_1^+ a_1 - a_2^+ a_2)$$

Y ist der Operator der Hyperladung.
Die eigentliche Ladung berechnet sich nach der Gell-Mann-Nishijima-Formel

$$\boxed{Q = \tfrac{1}{2} Y + T_3}$$

Die Vertauschungsrelationen sind zahlreich, ich nenne nur einige, die ich brauchen werde:

$$[T_+, T_-] = 2T_3$$
$$[T_3, T_\pm] = \pm T_\pm$$
$$[T_3, U_\pm] = \mp \tfrac{1}{2} U_\pm$$
$$[T_3, V_\pm] = \pm \tfrac{1}{2} V_\pm$$
$$[Y, T_\pm] = 0$$
$$[Y, U_\pm] = \pm U_\pm$$
$$[Y, V_\pm] = \pm V_\pm$$
$$[T_3, Y] = 0$$
$$[...]$$

Man würde an der vollständigen Liste erkennen, daß maximal 2 Generatoren kommutieren, d.h. es gibt 2 Casimir-Operatoren, weswegen die Multipletts auch zweidimensional werden.
Wenn man die Subalgebren der SU(3) betrachtet, so erkennt man in $\{T_+, T_-, T_3\}$die Drehimpulsalgebra SO(3) bzw. SU(2) wieder. Analog in $\{U_\pm, U_3\}$ und $\{V_\pm, V_3\}$.
Die Operatoren $T_\pm$, $V_\pm$, $U_\pm$ sind also Stufenoperatoren.

Was aber erhöhen bzw. erniedrigen sie?

Wegen $[T_3, Y] = 0$ kann man die Multipletts durch die Eigenwerte von T_3 und Y charakterisieren:

$$\{|T_3, Y\rangle\}$$

Mit Hilfe der Vertauschungsrelationen kann man die Wirkungsweise der Operatoren $T_\pm$, $U_\pm$ und $V_\pm$ auf einen Zustand $|T_3, Y\rangle$ berechnen:

$$T_3 Y\big(V_\pm |T_3, Y\rangle\big) = (T_3 \pm \tfrac{1}{2})(Y \pm 1)\big(V_\pm |T_3, Y\rangle\big)$$
$$\Rightarrow V_\pm |T_3, Y\rangle \propto |T_3 \pm \tfrac{1}{2}, Y \pm 1\rangle$$

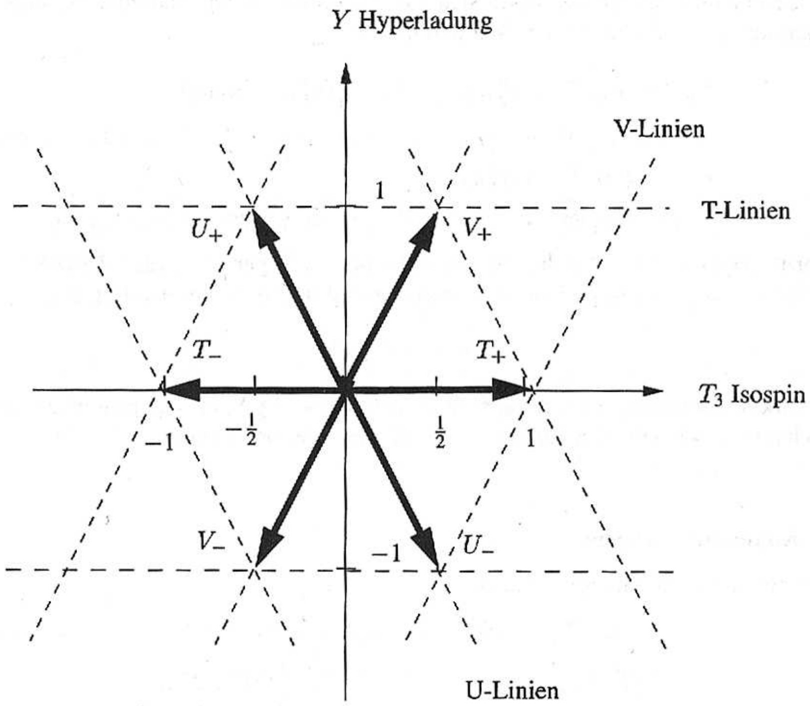
$$T_3 Y\big(U_\pm |T_3, Y\rangle\big) = (T_3 \mp \tfrac{1}{2})(Y \pm 1)\big(U_\pm |T_3, Y\rangle\big)$$
$$\Rightarrow U_\pm |T_3, Y\rangle \propto |T_3 \mp \tfrac{1}{2}, Y \pm 1\rangle$$

$$T_3 Y\big(T_\pm |T_3, Y\rangle\big) = (T_3 \pm 1)(Y)\big(T_\pm |T_3, Y\rangle\big)$$
$$\Rightarrow T_\pm |T_3, Y\rangle \propto |T_3 \pm 1, Y\rangle$$

$$T_3 Y\big(Y|T_3,Y\rangle\big) = (T_3)(Y)\big(Y_\pm|T_3,Y\rangle\big)$$
$$\Rightarrow Y_\pm|T_3,Y\rangle \propto |T_3,Y\rangle$$

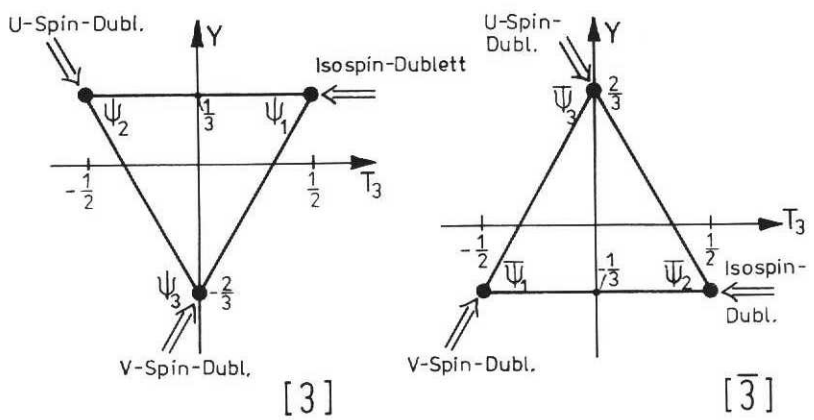
$$T_3 Y\big(T_3|T_3,Y\rangle\big) = (T_3)(Y)\big(T_3|T_3,Y\rangle\big)$$
$$\Rightarrow T_3|T_3,Y\rangle \propto |T_3,Y\rangle$$

Dieses Verhalten der Operatoren $T_\pm$, $U_\pm$ und $V_\pm$ läßt sich in dem folgenden **Operatordiagramm** veranschaulichen:



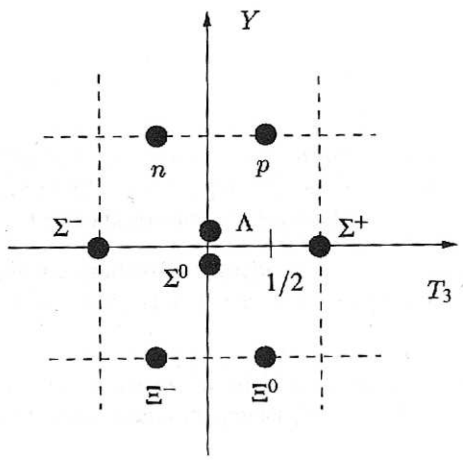
Die SU(3)-Multipletts sind also verkoppelte T-, U- und V-Multipletts. Die T-Multipletts liegen senkrecht zur Y-Achse, entlang der T-Linien, die V-Multipletts entlang der V-Linien und die U-Multipletts entlang der U-Linien.

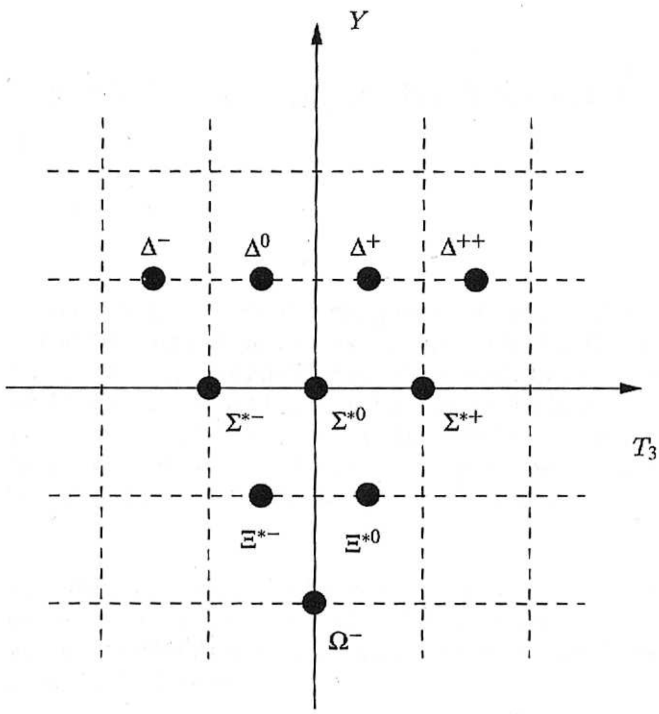
Die kleinsten nichttrivialen Darstellungen der SU(3) sind die **Tripletts:**



Sie werden mit den Quarks (u, d, s) zw. Antiquarks $(\bar{u}, \bar{d}, \bar{s})$ identifiziert.

Die nächsthöheren Darstellungen sind **Oktetts** und **Dekupletts.**





Sie kommen durch Ausreduktion der Darstellungen zustande:

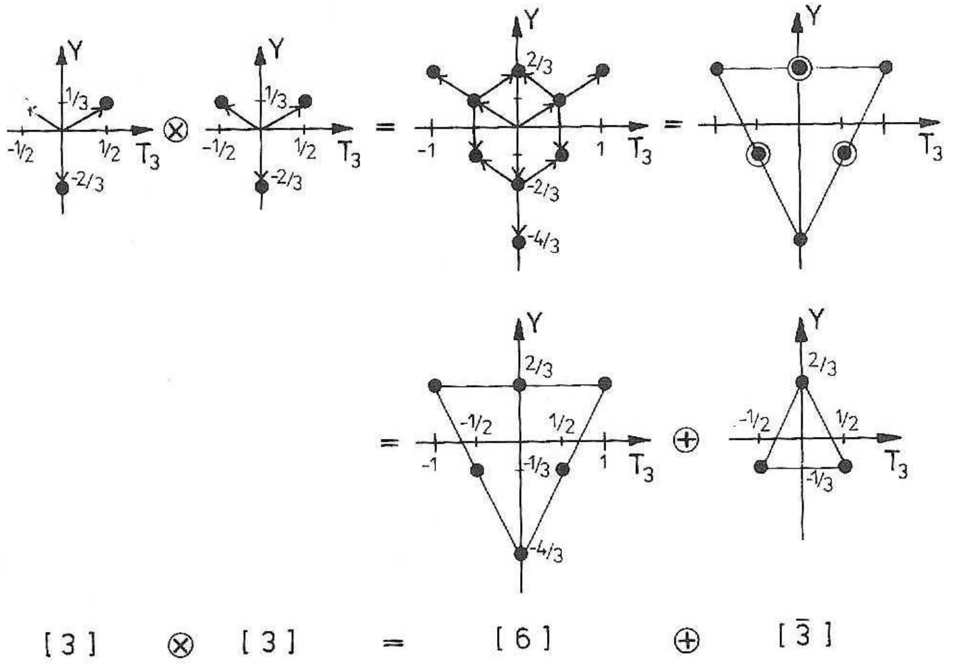
$[3]\otimes[3]\otimes[3]=[1]\oplus[8]\oplus[8]\oplus[10]$ (für Baryonen)

Das sind ein Singulett zwei Oktetts (z.B. Diagramm oben) und ein Dekuplett (s. Diagramm oben).

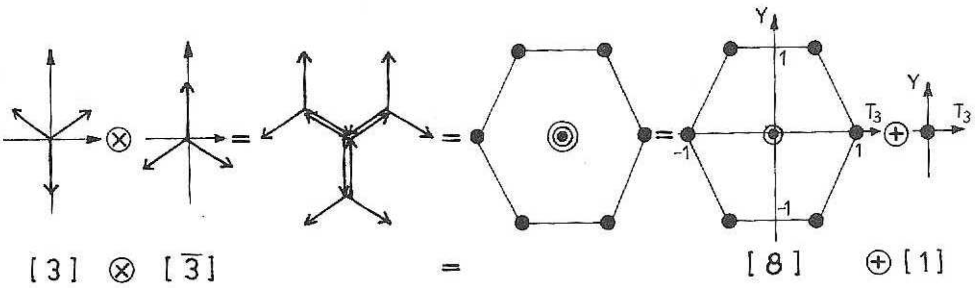
$[3]\otimes[\overline{3}]=[8]\oplus[1]$ (für Mesonen)

Das sind ein Mesonensingulett $\{\eta'\}$und ein Mesonennoktett $\{\pi^-,\pi^0,\pi^+,\kappa^-,\overline{\kappa}^0,\kappa^0,\kappa^+,\eta\}$.

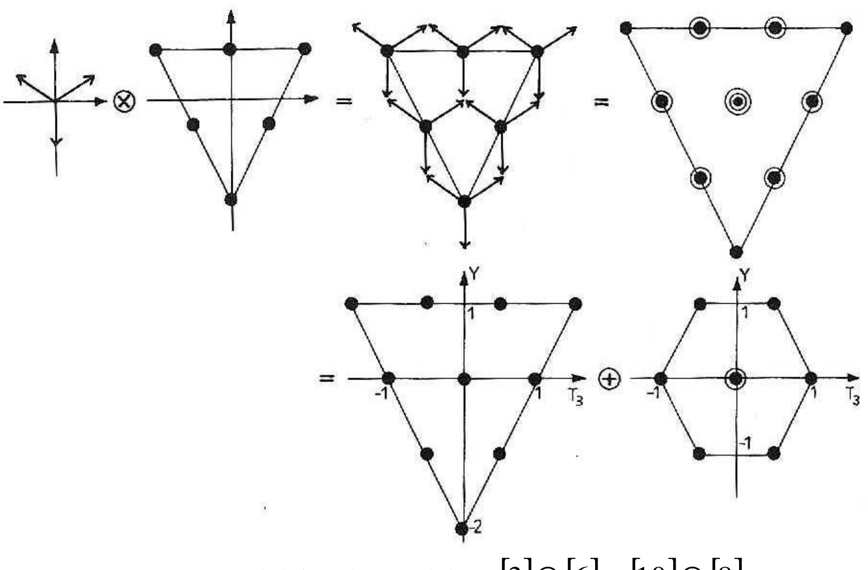
Zur graphischen Ausreduktion betrachte man folgende Skizzen:



Ausreduktion des direkten Produktes $[3] \otimes [3] = [6] \oplus [\bar{3}]$.



Ausreduktion des Produktes $[3] \otimes [\bar{3}] = [8] \oplus [1]$



Ausreduktion des Produktes $[3] \otimes [6] = [10] \oplus [8]$