Supersymmetrische Modelle in der Quantenmechanik

Sönke Wissel
wissels@uni-muenster.de

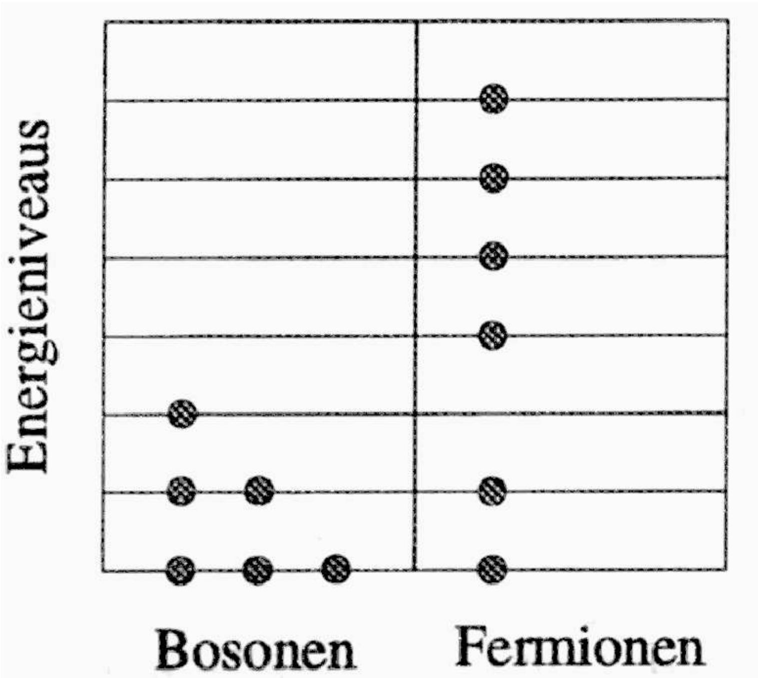
1 Einführung

Die Theorie der Supersymmetrie (kurz SUSY) wurde Anfang bis Mitte der siebziger Jahre unabhängig von Physikern der (ehemaligen) UdSSR, West-Europas und der USA formuliert.
Sie gilt heute als einer der möglichen Anwärter auf eine GUT (Grand Unified Theorie), mit deren Hilfe die drei bzw. zwei uns bekannten fundamentalen Wechselwirkungen (elektroschwache und starke) formell vereint werden könnten.
Dabei beschreibt die SUSY Transformationen zwischen bosonischen und fermionischen Teilchen. Wie jede Symmetrie so führt auch die SUSY auf Erhaltungssätze und somit zu Massen- bzw. Energieentartungen, mit denen die heutigen bekannten Teilchen aber auch die noch unbekannten zugehörigen sogenannten SUSY- oder Partnerteilchen klassifiziert werden können. Nach dieser Theorie sind Fermionen und Bosonen (ähnlich wie Protonen und Neutronen in der Isospin-Symmetrie) verschiedene Erscheinungsformen eines einzigen Superteilchens. Im Nachfolgenden werden die Grundgedanken der SUSY mit Hilfe der Einführung einfachster SUSY-Operatoren dargestellt.

2 Bose-Fermi-Supersymmetrie

2.1 Unterschiede zwischen Fermionen und Bosonen

Bosonen	Fermionen
Spin ganzzahlig	Spin halbzahlig
Tensor	Spinor
c-Zahl	a-Zahl (Grassmann-Zahlen)
Kommutator-Relationen	Antikommutator-Relationen
Bose-Einstein-Statistik	Fermi-Dirac-Statistik (Pauli-Prinzip)
Übermittler der Kräfte	Materieteilchen



2.2 Zweite Quantisierung (Einführung der Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren)

Wechselwirkungsprozesse können als Erzeugung und Vernichtung von Zuständen dargestellt werden.

Vakuumzustand: $|0\rangle$ mit $\langle 0|0\rangle = 1$

Bosonischer Erzeuger und Vernichter:

$$b^+ |n_B\rangle = \sqrt{n_B + 1}\, |n_B + 1\rangle \qquad \text{und} \qquad b^- |n_B\rangle = \sqrt{n_B}\, |n_B - 1\rangle$$

$$\Rightarrow |n_B\rangle = (n_B!)^{-1/2} (b^+)^{n_B} |0\rangle$$

Teilchenzahl- oder Besetzungszahloperator: $N_B = b^+ b^-$

Vertauschungsrelation: $\boxed{\text{Bosonen: } [b^-, b^+] = 1 \quad , \quad [b^+, b^+] = [b^-, b^-] = 0}$

$$b^{\pm} = (b^{\mp})^{\dagger} \qquad \text{und} \qquad N_B = {N_B}^{\dagger}$$

Fermionischer Erzeuger und Vernichter:

$$f^+ |n_F\rangle = \sqrt{n_F + 1}\, |n_F + 1\rangle \qquad \text{und} \qquad f^- |n_F\rangle = \sqrt{n_F}\, |n_F - 1\rangle$$

Teilchenzahl- oder Besetzungszahloperator: $N_F = f^+ f^-$

Nach dem Pauli-Prinzip wird der fermionische Einteilchen-Zustandsraum durch die beiden Elemente $|0\rangle$ und $|1\rangle$ aufgespannt

daher ist: $|2\rangle = f^+ |1\rangle = (f^+)^2 |0\rangle = 0$ und $(f^-)^2 |1\rangle = f^- |0\rangle = 0$

$$\Rightarrow (f^+)^2 = (f^-)^2 = 0 \text{ (Nilpotenz)}$$

Anti-Vertauschungsrelation: $\boxed{\text{Fermionen: } \{f^-, f^+\} = 1 \quad , \quad \{f^+, f^+\} = \{f^-, f^-\} = 0}$

$$f^+ = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad f^- = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad f^+ = (f^-)^\dagger$$

2.3 SUSY-Operatoren

Produktzustände: $|n_B n_F\rangle = |n_B\rangle |n_F\rangle$ mit $n_B = 0, 1, ..., \infty$ und $n_F = 0, 1$

fermionische Zustände: $|FERMION\rangle = |n_B 1\rangle$

bosonische Zustände: $|BOSON\rangle = |n_B 0\rangle$

einfachste SUSY-Operatoren: $Q_+ = b^- f^+$ und $Q_- = b^+ f^-$

$$Q_- |BOSON\rangle = 0 \text{ und } Q_+ |FERMION\rangle = 0$$
$$Q_+ |BOSON\rangle \sim |FERMION\rangle \text{ und } Q_- |FERMION\rangle \sim |BOSON\rangle$$

Supersymmetrie: Bei jeder Transformation durch die Q´s bleibt die Energie des Systems erhalten ($[H_S, Q_\pm] = 0$)

supersymmetrischer Hamiltonoperator: $\boxed{H_S = \{Q_+, Q_-\} = Q_1^2 = Q_2^2}$

$$Q_1 = Q_+ + Q_- \quad \text{und} \quad Q_2 = -i(Q_+ - Q_-) \text{ (beide hermitesch)}$$

Für Q_1 und Q_2 bleibt: $[H_S, Q_1] = [H_S, Q_2] = 0$ (Supersymmetrie)

Dabei gilt: $\{Q_1, Q_2\} = 0$

Q_+, Q_-	Q_1, Q_2
nicht-hermitesch	hermitesch
nilpotent	$\{Q_1, Q_2\} = 0$
$H_S = \{Q_+, Q_-\}$	$H_S = {Q_1}^2 = {Q_2}^2$

3 Lineare Bose-Fermi-Supersymmetrie („SUSY-Oszillator")

Die Tatsache, daß der Hamiltonoperator H_S die Einheit einer Energie besitzen muß (z.B. $\hbar\omega$), führt zu einem entsprechenden Vorfaktor $\sqrt{\hbar\omega}$ für die hermiteschen Operatoren Q_1 und Q_2 bzw. somit auch für Q_- und Q_+ ,und man erhält mit $[b, f] = 0$ und den fundamentalen Vertauschungsrelationen:

$$\begin{aligned}
H_S &= \hbar\omega\{b^- f^+, b^+ f^-\} \\
&= \hbar\omega(b^- b^+ f^+ f^- + b^+ b^- f^- f^+) \\
&= \hbar\omega[(1 + b^+ b^-) f^+ f^- + b^+ b^- (1 - f^+ f^-)] \\
&= \hbar\omega(b^+ b^- + f^+ f^-) = \hbar\omega(N_B + N_F) \\
&= H_B + H_F
\end{aligned}$$

Dieses läßt sich auch als $H_S = \hbar\omega(b^+ b^- + 1/2) + \hbar\omega(f^+ f^- - 1/2)$ schreiben und man kann somit den linearen supersymmetrischen Hamiltoperator als Verknüpfung eines Bose-Oszillator (quantenmechanische, harmonische Oszillator) und einem Fermi-Oszillator identifizieren.[1] Daher auch der Name Susy-Oszillator.

[1]

Bose-Oszillator:

$$H_B = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}\hat{q}^2 = \hbar\omega(b^+ b^- + 1/2) = \hbar\omega(N_B + 1/2)$$

$$\text{mit } b^\pm = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \cdot (\hat{q} \mp \frac{i\hat{p}}{m\omega}) \qquad [b^\pm = (b^\mp)^\dagger] \text{ und } N_B = b^+ b^-$$

mit $[\hat{q}, \hat{p}] = i\hbar$ erhält man

Vertauschungsrelation: $\boxed{[b^-, b^+] = 1 \;;\; [b^+, b^+] = [b^-, b^-] = 0}$ $\Rightarrow$ Bose-Oszillator

$$E_{n_B} = \hbar\omega(n_B + 1/2) \qquad n_B = 0, 1, 2, ...$$

Fermi-Oszillator:

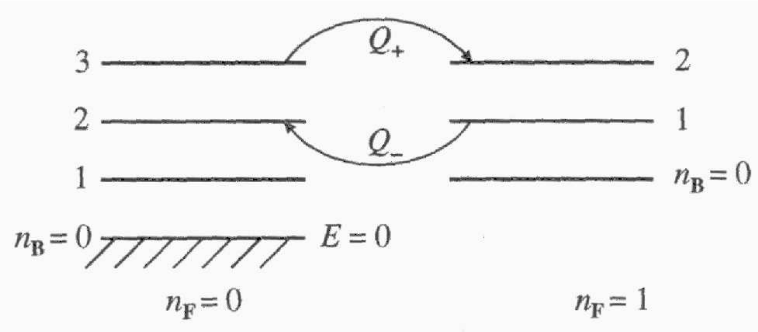
$$H_F = i\omega\hat{\psi}\hat{\pi} = -\frac{\hbar\omega}{2} \cdot (f^- f^+ - f^+ f^-) = \hbar\omega \cdot (N_F - 1/2)$$

$$\text{mit } f^\pm = \tfrac{1}{\sqrt{2\hbar}} \cdot (\hat{\psi} \mp i\hat{\pi}) \qquad [f^\pm = (f^\mp)^\dagger] \text{ und } N_F = f^+ f^-$$

mit $\{\hat{\psi}, \hat{\pi}\} = 1 \qquad \{\hat{\psi}, \hat{\psi}\} = \{\hat{\pi}, \hat{\pi}\} = 0$ erhält man

Das Energiespektrum des SuSy-Oszillators besitzt folgende Gestalt

$$E = \hbar\omega \cdot (n_B + n_F) \qquad n_B = 0, 1, 2...; n_F = 0, 1$$



1. Das Energiespektrum ist nicht negativ
2. Alle Zustände mit $E \neq 0$ sind zweifach entartet

4 Einführung in die nichtlineare Bose-Fermi -Supersymmetrie

Verallgemeinerung: $Q_+ = B^-(b^+, b^-)f^+$ und $Q_- = B^+(b^+, b^-)f^-$

$$H_S = B^-B^+f^+f^- + B^+B^-f^-f^+ \qquad (H_S \text{ hermitesch} \Rightarrow (B^\pm)^\dagger = B^\mp \Rightarrow (Q_\pm)^\dagger = Q_\mp)$$

Zustände werden im folgenden beschrieben durch $|E, n_F\rangle$, da $[H_S, N_F] = 0$ aber i.a. $[H_S, N_B] \neq 0$

$$|E, n_F\rangle = \begin{pmatrix} |E,0\rangle \\ |E,1\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |BOSON\rangle \\ |FERMION\rangle \end{pmatrix}$$

Übergang zur zweikomponentigen Darstellung:

$$\boxed{H_S = \begin{pmatrix} B^+B^- & 0 \\ 0 & B^-B^+ \end{pmatrix} = \tfrac{1}{2}\{B^-, B^+\} - \tfrac{1}{2}[B^-, B^+]\sigma^3}$$

$$\text{mit } E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Anti-Vertauschungsrelation: $\boxed{\{f^-, f^+\} = 1 \ ; \ \{f^+, f^+\} = \{f^-, f^-\} = 0}$ $\Rightarrow$ Fermi-Oszillator

$$E_{n_F} = \hbar\omega(n_F - 1/2) \qquad n_F = 0, 1$$

5 Das Eigenwertspektrum

Die beiden Merkmale (1,2) des SuSy-Oszillator-Spektrum folgenden direkt aus den definierten Transformationen:

Beweis:

zu 1.)

Da $H_S = Q_1^2$ (Q_1 hermitesch $\Rightarrow$ reelle Eigenwerte) muß $E \geq 0$ sein.

zu 2.)

Sei $|A\rangle$ Eigenzustand von Q_1 bzw. H_S mit $H_S |A\rangle = E |A\rangle$ bzw. $Q_1 |A\rangle = \sqrt{E} |A\rangle$ und $|B\rangle = Q_2 |A\rangle$, dann ist mit $\{Q_1, Q_2\} = 0$:

$Q_1 |B\rangle = Q_1 Q_2 |A\rangle = -Q_2 Q_1 |A\rangle = -\sqrt{E} Q_2 |A\rangle = -\sqrt{E} |B\rangle$

Somit ist auch $|B\rangle$ Eigenzustand von Q_1 bzw. von H_S mit dem gleichen Eigenwert E.

6 Reine und gemischte Zustände

Die im Rahmen des allgemeineren nichtlinearen SuSy-Modell auftretenden Zustände $|En_F\rangle$ (Eigenzustände von H_S und N_F) bezeichnet man auch als reine Zustände, da sie nur entweder rein bosonisch oder rein fermionisch sein können. Eine Linearkombination aus diesen reinen Zuständen nennt man auch gemischte Zustände. Die Eigenzustände von Q_1 und Q_2 sind gemischte Zustände, denn mit:

$$Q_1 |E0\rangle = \sqrt{E} |E1\rangle \text{ und } Q_1 |E1\rangle = \sqrt{E} |E0\rangle$$

sind

$$|1+\rangle = |E0\rangle + |E1\rangle \text{ und } |1-\rangle = |E0\rangle - |E1\rangle$$

Eigenzustände von Q_1 $(|A\rangle, |B\rangle)$[2]. In gleicher Weise findet man auch die Eigenzustände von Q_2:

$$|2\pm\rangle = |E0\rangle \pm i |E1\rangle$$

Es existieren also drei Sätze von Basiszuständen ($|En_F\rangle$, $|1\pm\rangle$ und $|2\pm\rangle$), wobei nur die erste Basis eine reine Basis darstellt.

---

[2]

$$Q_1 |1+\rangle = Q_1(|E0\rangle + |E1\rangle) = \sqrt{E}(|E1\rangle + |E0\rangle) = \sqrt{E} |1+\rangle$$

$$Q_1 |1-\rangle = Q_1(|E0\rangle - |E1\rangle) = \sqrt{E}(|E1\rangle - |E0\rangle) = -\sqrt{E} |1-\rangle$$

7 Quellen

Literatur

[1] H.Kalka/G.Soff: Supersymmetrie, Teubner Studienbücher

[2] Verständliche Forschung: Quantenphilosophie, Spektrum der Wissenschaft

[3] Verständliche Forschung: Teilchen, Felder und Symmetrien