Liegruppen und Liealgebren

3. November 1999

1 Definitionen

Definition: "Eine Liegruppe ist eine Gruppe, deren Gruppenelemente von einem oder mehreren Parametern abhängen. Die Multiplikation und Inversenbildung ist dann differenzierbar auf dem Parameterraum.". Die genaue Definition: Eine Liegruppe G ist eine Gruppe, die zusätzlich die Struktur einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit hat, derart, daß die Abbildungen

$$G \times G \to G, \qquad (g_1, g_2) \to g_1 g_2,$$

$$G \to G, \qquad g \to g^{-1}$$

differenzierbar sind. [1]
Beispiele:

[1] Für die genaue Definition noch einige Anmerkungen:
Definition: Eine topologische n-dimensionale Mannigfaltigkeit M ist ein Hausforffraum mit abzählbarer Basis für die Topologie, der lokal homöomorph zu R^n ist.
Hilfsdefinitionen:
1) Ein Hausdorffraum H ist ein topologischer Raum, für den gilt: Seien $p, q \in H \Rightarrow$ Es gibt (top.) Umgebungen von p und q mit leerem Schnitt.
Alle anschaulich vorstellbaren Räume sind hausdorffsch.
2) Eine abzählbare Basis für die Topologie ist eine abzählbare Teilmenge der Topologie, so daß sich alle Mengen der Topologie als abzb. Vereinigung der Basiselemente darstellen lassen.
3) Eine Abb. x heißt homöomorph, wenn sie bijektiv ist und x, x^{-1} stetig sind. Es wird also gefordert: Zu jedem $p \in M$ ex. eine Umgebung U, so daß $x : U \to R^n$ Homöomorphismus.
Definition: x: "Karte von M um p", x^{-1}: "lokale Parametrisierung". Ein Atlas $\mathcal{A}$ ist eine Menge von Karten. Ein Atlas heißt differenzierbar, falls für je zwei Karten $x, y \in \mathcal{A}$ $\quad y \circ x^{-1}$ differenzierbar ist. Je zwei Karten eines Atlas sind also verträglich. Ein maximaler differenzierbarer Atlas $\mathcal{A}$ enthält alle mit $\mathcal{A}$ verträglichen Karten und heißt differenzierbare Struktur.
Definition: Ist $\mathcal{A}$ eine differenzierbare Struktur für eine topologische Mannigfaltigkeit M, so heißt $(M, \mathcal{A})$ eine *differenzierbare Mannigfaltigkeit*(db. Mfk.).
Eine 2-dim. db. Mfk. kann man sich als Oberfläche irgendeines hinreichend glatten Körpers in den Raum eingebettet denken. Z.B. bildet das direkte Produkt zweier 2-dim. Drehgruppen $S^1 \times S^1$ einen Torus (den man durch $x^{-1} : [0, 2\pi[\times[0, 2\pi[\to \mathbf{C}^2, (\phi, \psi) \to (e^{i\phi}, e^{i\psi})$ parametrisiert.)

- GL(n), SL(n), O(n), SO(n), U(n), SU(n). Wir benutzen die treue (oder getreue) Darstellung der U(n), die $n \times n$-Matrizen über C mit den Eigenschaften $A^{-1} = \overline{A}^t$.Die Gruppeneigenschaft ist klar wegen $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} = \overline{B}^t\overline{A}^t = \overline{B^tA^t} = \overline{AB}^t$.Die Differenzierbarkeit der Multiplikation macht man sich anschaulich klar z.B. für U(2) als Hintereinanderschaltung von komplexen Drehungen, deren jede differenzierbar ist. Wegen $(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj}$ hängen die Einträge von AB differenzierbar von den a_{ij} und b_{ij} ab. [2]Die Invertierung ist klar, da für jede invertierbare Matrix A $A^{-1} = \det(A)^{-1}\tilde{A}$ mit $\tilde{a}_{ij} = (-1)^{i+j}\det_{n-1}(A_{ji})$ mit A_{ji} der $(n-1)\times(n-1)$-Matrix, die durch Streichung der j-ten Zeile und i-ten Spalte aus A entsteht. Diese Abbildung ist differenzierbar.
  Dieser Beweis gilt auch für die anderen Gruppen.

- Gruppe der Drehungen und Gruppe der Translationen im Ortsraum für Wellenfunktionen (s.u.)

- Die Lorentzgruppe

- C_{3v} ist keine Liegruppe, da diskret.

2 Translationen und Drehungen

Wir begeben uns in den Hilbertraum in Ortsdarstellung und betrachten Translationen von Wellenfunktionen. Translationen werden durch einen unitären Operator vermittelt.
Typen von Verschiebungen:

- passiv: Der Zustand "bleibt", das Koordinatensystem wird verschoben.

- aktiv: Das Koordinatensystem "bleibt", die Wfk wird verschoben.

Wir betrachten hier aktive Verschiebungen bei fester Zeit.
Mit $\Psi_\alpha(\vec{r}), \Psi_{\alpha'}(\vec{r}), \hat{U}_r(\vec{\rho})$ dem unverschobenen und dem um $\vec{\rho}$ verschobenen Zustand sowie dem Verschiebungsoperator gilt

$$\Psi_{\alpha'}(\vec{r}) = \hat{U}_r(\vec{\rho})\Psi_\alpha(\vec{r}) = \Psi_\alpha(\vec{r} - \vec{\rho}).$$

[2]Differentialgeometrisch ist das so einzusehen: Seien $g_1, g_2 \in U(n)$. Dann existieren Karten x_1, x_2, x_3 um g_1, g_2, g_1g_2 nach C^n, wobei deren Funktionaldeterminanten bzgl. der gleichen Basis gerade die Matrizen sind (Die Karten sind differenzierbar, da lineare Abb. auf endl. dim. Räumen differnzierbar sind.). Dann ist die Abb. $C^n \times C^n \to C^n : (x_1(g_1), x_2(g_2)) \to x_1(g_1)x_2(g_2)$als Verkettung linearer Abb. auf einem endlichdimensionalen Raum differenzierbar. Differenzierbarkeit auf Mannigfaltigkeiten ist aber gerade definiert durch Differenzierbarkeit der Karten und der zurückgeholten Abbildung.
Wenn f die Multiplikationsabb. ist, dann ist $f_{*|(g_1,g_2)} = x_1(g_1)x_2(g_2)$ bezüglich der kanonischen Basen $\frac{\partial}{\partial x_i}$ des Tangentialraumes, also gleich dem Produkt der Matrizen.

Zur Bestimmung von $\hat{U}_r(\vec{\rho})$ betrachten wir *infinitesimale Translationen.* Dazu verschieben wir n-mal um $\vec{\rho}/n$. Eine solche Translation kann man schreiben als $U(\frac{\vec{\rho}}{n}) = 1 - \frac{\vec{\rho}\cdot\vec{\nabla}}{n}$ (Abbruch der Taylorreihe nach dem dreidimensionalen linearen zweiten Glied). Aus einem bekannten Satz der Analysis folgt nun

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{\vec{\rho}\cdot\vec{\nabla}}{n}\right)^n = e^{-\vec{\rho}\cdot\vec{\nabla}}.$$

[3][4] U ist unitär wegen

$$\hat{U}_r^{-1}(\vec{\rho}) = e^{+\frac{i\vec{\rho}\cdot\hat{\vec{p}}}{\hbar}} = \left(e^{-\frac{i\vec{\rho}\cdot\hat{\vec{p}}^\dagger}{\hbar}}\right)^\dagger \underbrace{=}_{\hat{\vec{p}}\text{ hermitesch}} \left(e^{-\frac{i\vec{\rho}\cdot\hat{\vec{p}}}{\hbar}}\right)^\dagger = \hat{U}_r^\dagger(\vec{\rho}).$$

Einer Verschiebung im Ortsraum entspricht also ein unitärer Operator, der wie zu erwarten normerhaltend ist. Ein unitärer Operator ist aber eine Drehung im Hilbertraum.
Wir haben Gruppenstruktur und einen Gruppenisomorphismus

$$(R^3,+) \to \mathcal{L}(H,\circ): \quad \vec{\rho} \to \hat{U}_{(r)}(\vec{\rho}),$$

wobei U nicht von r abhängt. Die Untergruppe U von $\mathcal{L}(H)$ ist wie die Translationsgruppe abelsch, da für $[\hat{x}_i, \hat{x}_j] = 0 \quad e^{\hat{x}_i}e^{\hat{x}_j} = e^{\hat{x}_i+\hat{x}_j}$ gilt.

[3]Eine alternative Bestimmung von $\hat{U}_r(\vec{\rho})$: Sei zunächst $\vec{\rho}$ parallel zur x-Achse, also $\vec{\rho} = \rho\vec{e}_1$. Dann folgt durch Taylor-Entwicklung:

$$\begin{aligned}\Psi_\alpha(\vec{r}-\vec{\rho}) &= \Psi_\alpha(x-\rho,y,z)\\ &= \Psi_\alpha(x,y,z) - \rho\frac{\partial}{\partial x}\Psi_\alpha(x,y,z) + \frac{1}{2!}\rho^2\frac{\partial^1}{\partial x^2}\Psi_\alpha(x,y,z) - \cdots\\ &= e^{-\rho\frac{\partial}{\partial x}}\Psi_\alpha(x,y,z).\end{aligned}$$

Liegt der Verschiebungsvektor beliebig, können wir verallgemeinern zu

$$\begin{aligned}\Psi_\alpha(\vec{r}-\vec{\rho}) &= e^{-\vec{\rho}\cdot\vec{\nabla}}\Psi_\alpha(\vec{r})\\ &= \underbrace{e^{-\frac{i\vec{\rho}\cdot\hat{\vec{p}}}{\hbar}}}_{\hat{U}_r(\vec{\rho})}\Psi_\alpha(\vec{r}).\end{aligned}$$

mit dem Impulsoperator $\hat{\vec{p}} = -i\hbar\vec{\nabla}$.

[4]Das Konzept infinitesimaler Drehungen und Translationen wird im folgenden sehr wichtig. Daß der Limes existiert, ist ein Hinweis darauf, daß die Gruppe abgeschlossen ist. Der exakte Beweis der Abgeschlossenheit läuft so:
Da der Gruppenisomorpismus $\vec{\rho} \to \hat{U}_r(\vec{\rho})$ stetig ist und endlichdimensional im Urbildraum und der Urbildraum abgeschlossen (R^3), existiert der Limes auch in der Gruppe U der unitären Translationen im Hilbertraum.
Dagegen ist z.B die Lorentzgruppe nicht abgeschlossen, da für alle $v < c$ Transformationen existieren, nicht jedoch für $v = c$.

Weiterhin soll der verschobene Zustand im potentialfreien Raum wiederum die Schrödingergleichung erfüllen. Also:

$$\begin{aligned}
i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi_{\alpha'}(\vec{r},t) &= i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\hat{U}_r(\vec{\rho})\Psi_\alpha(\vec{r},t) \\
&= \hat{U}_r(\vec{\rho})i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi_\alpha(\vec{r},t) \\
&= \hat{U}_r(\vec{\rho})\hat{H}\Psi_\alpha(\vec{r},t) \\
&= \hat{U}_r(\vec{\rho})\hat{H}\hat{U}_r^{-1}(\vec{\rho})\Psi_{\alpha'}(\vec{r},t) \\
&= \hat{U}_r(\vec{\rho})\hat{H}\hat{U}_r^{\dagger}(\vec{\rho})\Psi_{\alpha'}(\vec{r},t).
\end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$\hat{U}_r(\vec{\rho})\hat{H}\hat{U}_r^{\dagger}(\vec{\rho})! = \hat{H} \quad \text{oder} \quad [\hat{H},\hat{U}_r(\vec{\rho})]! = 0 \quad \text{und damit} \quad [\hat{H},\hat{\vec{p}}]! = 0,$$

da $\vec{\rho}$ ein beliebiger Vektor ist. Ein Operator, der mit dem Hamiltonoperator kommutiert vermittelt aber, wie aus QM bekannt, eine Konstante der Bewegung.[5] Die Homogenität des Raums ist also gleichbedeutend damit, daß der Impuls eine Konstante der Bewegung ist. Wenn $\hat{H}$ vom Ort $\vec{r}$ abhängt, gilt die obige Rechnung nicht mehr, und auch der Impulssatz gilt ja nur in einem potentialfreien Gebiet. Wir erkennen, da Invarianzen (hier gegen die Verschiebung), bzw. Homogenitäten (hier: des Raums) Erhaltungsgrößen bedingen und umgekehrt. Dies kann verallgemeinert werden zum *Noether'schen Theorem*:

Operatoren, die mit dem Hamiltonoperator vertauschen, induzieren Erhaltungsgrößen,
oder in der klassischen Formulierung:
Wenn die Euler-Lagrangeschen Bewegungsgleichungen invariant unter einer Koordinatentransformation $t'(t), \vec{q}'(\vec{q},t)$ sind, so existiert daraus die Existenz einer Erhaltungsgröße.[6]

[5] Es gilt ja: Sei $\hat{H}\Psi = E\Psi$ mit E Eigenwert zu $\hat{H}$, sowie gelte $[\hat{H},\hat{U}] = 0$. Dann ist $\hat{H}(\hat{U}\Psi) = \hat{U}(\hat{H}\Psi) = \hat{U}E\Psi = E(\hat{U}\Psi)$. Die Eigenwerte bleiben also gleich. Da aber der Zeitverschiebungsoperator sich aus sukzessiver Anwendung des Hamiltonians zusammensetzt, bleiben die Eigenwerte mit der Zeit gleich, also liefert $\hat{U}$ eine Konstante bzgl. Zeittranslation.

[6] Impulserhaltung in der klassischen Mechanik: Sei $L(r,\dot{r},t)$ Lagrangefunktion, in der die Vektorpfeile bzw. Indizierung für Mehrteilchensysteme weggelassen wurden. Wir fordern, daß sich L bei Verschiebung des Teilchens r nach r+a um einen konstanten Vektor a nicht ändert. Das heißt

$$\delta L = \frac{\partial L}{\partial r}\delta r = a\frac{\partial L}{\partial r} = 0.$$

. Da a beliebig, folgt $\partial L/\partial r = 0$.Die Lagrange-Gleichung

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial L}{\partial r} = 0 \quad \text{wird deswegen zu} \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = \frac{d}{dt}p = 0, \quad \Rightarrow p = \text{const.}$$

Man erhält nach einer analogen Rechnung für den Operator der *zeitlichen* Translation um τ:

$$\hat{U}_t(\tau) = e^{-\tau \frac{\partial}{\partial t}} = e^{\frac{i\tau\hat{E}}{\hbar}} = e^{\frac{i\tau\hat{H}}{\hbar}} \quad \text{mit} \quad \hat{E} = i\hbar\frac{\partial}{\partial t} = \hat{H}.$$

U_t ist ebenfalls unitär und besitzt dieselbe Gruppenstruktur wie U_r. Wie eben zeigt man leicht: Die zeitliche Invarianz des Hamiltonoperators ($[\hat{H}, \hat{U}_t] = 0$) impliziert Energieerhaltung.

2.1 Drehungen

*Definition:*Eine Liegruppe G heißt abgeschlossen, falls für alle $a_n \in G \lim_{n\to\infty} a_n = a \in G$.
Definition: Eine Liegruppe G heißt kompakt, wenn jede Folge in G eine konvergente Teilfolge besitzt (also endliches Gruppenvolumen).
Beispiel: Die Translationen sind keine kompakte Gruppe, weil die sukzesive Verschiebung um 1 entlang der x-Achse zwar eine Folge ist, aber keine konvergente TF enthält. Dagegen sind die Rotationsgruppe SO(n)und die Inversions-Rotationsgruppe SO(n) kompakte Liegruppen.
Definition: Eine Liegruppe heißt zusammenhängend, falls die Mannigfaltigkeit zusammenhängend ist. Sie heißt einfach zusammenhängend, wenn die Mannigfaltigkeit einfach zusammenhängend ist, wenn also "alle Wege im Parameterraum von einem Gruppenelement zu einem anderen stetig ineinander überführt werden können.
Beispiel: SO(n) ist zusammenhängend. O(n) ist nicht zusammenhängend, sondern vielmehr das direkte Produkt von SO(n) und der Menge der Drehungen mit det=-1 (ungerade Anzahl von Spiegelungen). Die Menge der Translationen ist einfach zusammenhängend. [7]
Nun möchten wir wieder den Operator berechnen, der Drehungen vermittelt und dabei die Struktur von SO(3) bestimmen.
Sei also $\delta\vec{\phi} = (\delta\phi_x, \delta\phi_y, \delta\phi_z)$ ein infinitesimaler Drehvektor. Dann lautet der gedrehte Ortsvektor

$$\vec{r'} = \hat{R}r = \vec{r} + \delta\vec{r} = \vec{r} + \delta\vec{\phi} \times \vec{r}.$$

[7]Aber es gilt:
Die Rotationsgruppe für $n > 2$ ist nicht-einfach zusammenhängend.
Beweis:(nur n=3) Ordnet man jeder Drehung einen Vektor zu, der die Richtung der Drehachse $\vec{\phi}$ angibt und dessen Betrag gleich dem Drehwinkel $\phi \in [-\pi, \pi]$ ist, erhält man eine Kugel mit Radius π, die alle Vektoren enthält. Diese Zuordnung ist ein Isomorphismus. Drehungen um π und $-\pi$ führen zum selben Ergebnis. Deswegen können wir gegenüberliegende Punkte der Kugeloberfläche miteinander identifizieren. Seien nun $\hat{R}(\vec{\phi}_1), \hat{R}(\vec{\phi}_2)$ zwei Drehungen. Dann führt ein Weg von der Spitze von ϕ_1 gerade zur Kugeloberfläche, taucht am Antipoden der Kugel wieder auf und führt nach ϕ_2. Der zweite Weg geht vollständig innerhalb der Kugel von ϕ_1 nach ϕ_2. Man kann sich vorstellen, daß diese beiden Wege durch keine stetige Deformation ineinander übergehen ($\pi(SO(n)) \neq 0$).

Es sei

$$\Psi_{\alpha'}(\vec{r},t) = \hat{U}_R(\delta\vec{\phi})\Psi_\alpha(\vec{r},t) = \Psi_\alpha(\hat{R}^{-1}\vec{r},t).$$

Letzteres drückt aus, daß die gedrehte Wellenfunktion gleich der ursprünglichen Wellenfunktion in einem zurückgedrehten Koordinatensystem ist. Es gilt nun:

$$\begin{aligned}
\Psi_{\alpha'}(\vec{r},t) &= \Psi_\alpha(\hat{R}^{-1}\vec{r},t) = \Psi_\alpha(\vec{r}-\delta\vec{r},t) \approx \Psi_\alpha(\vec{r}-\delta\vec{\phi}\times\vec{r},t) \\
&\approx \Psi_\alpha(\vec{r},t) - (\delta\vec{\phi}\times\vec{r})\cdot\vec{\nabla}\Psi_\alpha(\vec{r},t) \\
&= \Psi_\alpha(\vec{r},t) - \frac{i}{\hbar}(\delta\vec{\phi}\times\vec{r})\cdot\hat{\vec{p}}\Psi_\alpha(\vec{r},t) \\
&= \underbrace{\left(\mathbf{1} - \frac{i}{\hbar}\delta\vec{\phi}\cdot\hat{\vec{L}}\right)}_{=\hat{U}(\delta\vec{\phi})}\Psi_\alpha(\vec{r},t), \quad \text{da} \quad \hat{\vec{L}} = \vec{r}\times\hat{\vec{p}}.
\end{aligned}$$

Wir bestimmen nun den Drehimpulsoperator $L := \hat{\vec{L}}$ für endliche Drehungen $\vec{\phi}$.Eine Rechnung wie zur Bestimmung von $\hat{U}_r$ und $\hat{U}_t$ führt auf

$$\hat{U}_R(\vec{\phi}) = e^{-\frac{i}{\hbar}\vec{\phi}\cdot L}.$$

[8] Verallgemeinerung des Resultates: Die Elemente einer Liegruppe werden geschrieben als

$$\hat{U}(\alpha_1,\cdots,\alpha_n;\vec{r}) = e^{-i\sum_{\mu=1}^{n}\alpha_\mu L_\mu}, \quad \alpha_\mu \in \mathbf{R}.$$

(Beachte: Summe als Skalarprodukt von $\vec{\phi}$ und L.) Die L_μ heißen Generatoren der Gruppe. Sind nur die Generatoren einer Gruppe bekannt, so kann man mit ihnen infinitesimale Drehungen aufbauen und dann durch Limesbildung endliche Operatoren konstruieren. Es gilt weiterhin:
Sind die Operatoren einer Liegruppe unitär, so müssen die Generatoren hermitesch sein.

[8] Nach der Bestimmung der endlichen Drehung aus der infinitesimalen durch 1.Folgendarstellung der Exponentialfunktion und 2. Taylorentwicklung folgt hier noch ein dritter Weg: Sei die Drehachse parallel zur x-Achse. Dann ist

$$\hat{U}_R(\phi_x+\delta\phi_x) \approx (\mathbf{1} - \frac{i}{\hbar}\delta\phi_x L_x)\hat{U}_R(\phi_x).$$

Dann ist

$$\frac{\delta\hat{U}_R(\phi_x)}{\delta\phi_x} = \frac{\hat{U}_R(\phi_x+\delta\phi_x)-\hat{U}_R(\phi_x)}{\delta\phi_x} = -\frac{i}{\hbar}L_x\hat{U}_R(\phi_x),$$

d.h. es gilt im Limes

$$\frac{d}{d\phi_x}\hat{U}_R(\phi_x) = -\frac{i}{\hbar}L_x\hat{U}_R(\phi_x).$$

Mit $\hat{U}_R(0) = \mathbf{1}$ ergibt sich

$$\hat{U}_R(\phi_x) = e^{-\frac{i}{\hbar}\phi_x L_x}$$

und die dreidimensionale Verallgemeinerung liefert das Resultat.

Beweis:

$$\hat{U}^\dagger(\delta\alpha_\mu) = \mathbf{1} + i\sum_{\mu=1}^{n} \delta\alpha_\mu L_\mu^\dagger \quad ! = \quad \hat{U}^{-1}(\delta\alpha_\mu) = \mathbf{1} + i\sum_{\mu=1}^{n} \delta\alpha_\mu L_\mu .$$

Daraus folgt wegen $\alpha_\mu \in \mathbf{R} \quad L_\mu^\dagger = L_\mu$.
Weiterhin kann man durch eine recht lange Rechnung zeigen, daß Beziehungen der Form

$$[L_k, L_m] = c_{kmj} L_j, \quad c_{ijk} = -c_{jik}$$

mit *Strukturkonstanten* c_{ijk} existieren, die die Beziehungen der Generatoren eindeutig festlegen. Man nennt sie Vertauschungsrelationen.[9] Die Strukturkonstanten enthalten alle Informationen über die Gruppe, weil sie die Vertauschbarkeit der in verschiedener Reihenfolge ausgeführten infinitesimalen Gruppenoperationen festlegen. Aus den infinitesimalen Operatoren können wegen der Abgeschlossenheit der Gruppe alle endlichen aufgebaut werden (zumindest auf Zusammenhangskomponenten).[10]Die Wenn die Generatoren nicht bekannt sind, lassen sie sich aus der Gruppe durch Differentation berechnen:

$$\frac{\partial}{\partial \phi_\mu} \hat{U}_R(\vec{\phi})_{|\vec{\phi}=0} = -iJ_\mu$$

[9] Der Weg zu den Strukturkonstanten:
Um Informationen über Vertauschbarkeit zu bekommen, wenden wir zwei infinitesimale Drehungen an und schalten danach deren Inverse. Vertauschen die Drehungen nicht, wird die vierfache Drehung nicht bei der Nulldrehung landen. Wir berechnen also

$$\hat{U}^{-1}(\delta\beta_\mu)\hat{U}^{-1}(\delta\alpha_\mu)\hat{U}(\delta\beta_\mu)\hat{U}(\delta\alpha_\mu).$$

Nun entwickelt man die $\hat{U}'s$ in eine Potenzreihe, die nach dem dritten Glied abbricht. Beispielsweise ist mit der Einsteinschen Summenkonvention

$$\hat{U}^{-1}(\delta\beta_\mu) = \mathbf{1} + i\delta\beta_i L_i - \frac{1}{2}\delta\beta_i\delta\beta_j L_i L_j .$$

Einsetzen in die vier Audrücke ergibt

$$\hat{U}^{-1}(\delta\beta_\mu)\hat{U}^{-1}(\delta\alpha_\mu)\hat{U}(\delta\beta_\mu)\hat{U}(\delta\alpha_\mu) = \mathbf{1} + \delta\alpha_k\delta\beta_m(L_k L_m - L_m L_k),$$

wobei die Indizes k und m zu $\hat{U}^{-1}(\delta\alpha_\mu)$ bzw. $\hat{U}(\delta\beta_\mu)$ gehören. Die Differenz der vier Drehungen zur Nulldrehung bezeichnen wir mit $\hat{U}(\delta\gamma_\nu)$ und finden

$$\delta\alpha_k\delta\beta_m(L_k L_m - L_m L_k) = -i\delta\gamma_j L_j .$$

Mit $-i\delta\gamma_j := c_{kmj}\delta\alpha_k\delta\beta_m$ erhalten wir die gesuchten Strukturkonstanten, so daß

$$[L_k, L_m] = c_{kmj} L_j$$

gilt.

[10] $\hat{U}_R$ ist wiederum unitär, wobei man wie bei der Translation die Hermitizität von $\hat{\vec{L}}$ ausnutzt. Auch hier kann man analog zeigen, daß die Isotropie des Raums die Erhaltung des Drehimpulses impliziert.

2.2 Die Liealgebra der Drehgruppe SO(3)

Die Eigenschaften der Generatoren führen zu der folgenden Definition:
Definition: Eine **K**-Lie-Algebra ist ein **K**-Vektorraum L zusammen mit einer bilinearen Abbildung [,]:$L \times L \to L$ mit

$$\begin{array}{lrl} (i) & [X,Y] = -[Y,X] & \text{für alle} \quad X,Y \in L \\ (ii) & [X,[Y,Z]] = [[X,Y],Z] + [Y,[X,Z]] & \text{für alle} \quad X,Y,Z \in L \quad \text{(Jacobi-Identität).} \end{array}$$

Der Zusammenhang zwischen Liealgebren und der zugehörigen Liegruppe kann wie folgt umschrieben werden: "Die Liegruppe entsteht aus der Liealgebra durch die Exponentialabbildung."
Beispiel: Die Menge der $n \times n$- Matrizen $M(n, \mathbf{R})$ (Vektorraum der Dimension n^2)wird durch die Exponentialabbildung vermittels $A \to e^A$ nach $GL(n, \mathbf{R})$ abgebildet. Dazu beweist man leicht, daß e^A invertierbar für alle $A \in M(n, \mathbf{R})$.Die Liealgebra der Liegruppe $GL(n, \mathbf{R})$ wird mit $gl(n, \mathbf{R}) = M(n, \mathbf{R})$ bezeichnet.
Nun greift man auf Erkenntnisse aus QM 1 zurück. Wird der Drehimpulsoperator als Nabla geschrieben, folgt aus

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} \quad \text{und} \quad \hat{\vec{p}} = i\hbar\vec{\nabla} \quad \Rightarrow \quad [L_i, L_j] = i\hbar\epsilon_{ijk}L_k \quad \text{(zyklisch)}$$

mit dem total antisymmetrischen Tensor ϵ_{ijk}. Nachrechnen liefert tatsächlich, daß die im letzten Abschnitt gefundenen allgemeinen Generatoren beide Beziehungen, die die Liealgebraeigenschaft fordert, automatisch erfüllen. Da die Vertauschungsrelationen allgemeingültig sind, nennt man jeden Vektoroperator $J = \hat{\vec{J}}$, der sie erfüllt, Drehimpuls.[11]
Achtung: Wenn man die Generatoren anders linearkombiniert, ändern sich auch die Strukturkonstanten. Geht man von J_1, J_2, J_3 über zu J_+, J_-, J_3, gilt ja $[J_3, J_\pm] = \pm J_\pm]$ und $[J_+, J_-] = 2J_3$. Die Strukturkonstanten hängen also von der Darstellung der Liegruppe ab, d.h. von der Wahl der Parameter ab.

[11]Allein aus den Relationen beweist man z.B.: $[J, J^2] = 0$, d.h. wir können beispielsweise J^2, J_z gleichzeitig diagonalisieren. Die zugehörigen Zustände nannten wir Ψ_{jm} und erhielten

$$\begin{aligned} J^2\Psi_{jm} &= j(j+1)\Psi_{jm} \\ J_z\Psi_{jm} &= m\Psi_{jm} \\ J_+\Psi_{jm} &= \sqrt{j(j+1) - m(m+1)}\Psi_{jm+1} \\ J_-\Psi_{jm} &= \sqrt{j(j+1) - m(m-1)}\Psi_{jm-1} \end{aligned}$$

mit $J_+ := J_x + iJ_y$ und $J_- := J_x - iJ_y$.Die Leiteroperatoren $J_\pm$ führen bekanntlich nicht aus der Menge der 2j+1 Eigenfunktionen zu einem festen Wert von m heraus. Der durch die 2j+1 Eigenfunktionen aufgespannte Unterraum des Hilbertraums ist invariant unter den Leiteroperatoren. Wir können also eine Matrixdarstellung der Drehimpulsoperatoren in Blockmatrizen aufspalten, jede zu einem m gehörend. Die Darstellung ist also nicht irreduzibel. Der Wechsel von J_x, J_y, J_z zu $J_\pm, J_3$ entspricht also einem Basiswechsel, in dem die Matrizendarstellung der Gruppe sich vereinfacht (s. letzter Vortrag.)

Umgekehrt gilt aber:
Falls ein Satz von N Operatoren, der geschlossen unter Kommutation ist, gegeben ist, bestimmen diese Operatoren eine Lie'sche Gruppe, deren Generatoren sie sind. *(Liesches Theorem)*[12]
Definition: Als Rang einer Liegruppe bezeichnet man die Zahl der miteinander kommutierenden Operatoren.
Beispiel: Bei der abelschen Translationgruppe kommutieren die drei Generatoren $\hat{p}_\mu = -i\frac{\partial}{\partial x}$, der Rang ist also gleich 3. Das bedeutet aber, daß die Translationsgruppe als Produkt dreier Rang 1 -Gruppen, der Verschiebungen in x-,y- und z-Richtung, geschrieben werden kann.
Definition: Eine Liegruppe heißt einfach, wenn sie keinen Lieschen (also kontinuierlichen) Normalteiler besitzt, halbeinfach, wenn sie keinen abelschen Lieschen Normalteiler besitzt.
Ein Kriterium zur Feststellung von Normalteilern ist folgendes:
Falls man aus den n Generatoren $\hat{G}_i$ einer Liegruppe m Operatoren $\hat{A}_i$ linear kombinieren kann, so daß

$$[\hat{G}_i, \hat{A}_k] = a_{ikl}\hat{A}_l \quad \text{für alle} \quad \hat{G}_i,$$

besitzt die Gruppe einen Normalteiler. Die m Generatoren $\hat{A}_i$ bilden eine Unteralgebra. Wegen der obigen Eigenschaft ist diese Unteralgebra ein Ideal. Analog definiert man also:
Definition: Eine Liealgebra heißt einfach, wenn sie kein Ideal außer dem Nullideal besitzt, halbeinfach, wenn sie kein abelsches Ideal besitzt.
Die abelsche Eigenschaft einer Unteralgebra induziert einen abelschen Normalteiler in der Liegruppe.
Beispiel: 1) Die Drehgruppe besitzt keinen Normalteiler außer sich selbst. Das erkennt man sofort an den Vertauschungsrelationen der Generatoren.
2) In der Translations-Rotationsgruppe bilden die Translationen einen Normalteiler. (ohne Beweis)
3) Halbeinfache Liegruppen lassen sich immer als direktes Produkt einfacher Liegruppen aufbauen. So ist die Gruppe $SO(3) \bigotimes_n SO(3)$ durch die Vertauschungsrelationen $[\hat{L}_i^{(m)}, \hat{L}_j^{(n)}] = i\hbar\epsilon_{ijk}L_k^{(n)}\delta_{nm}$ bestimmt, und man erkennt leicht, daß in der zugehörigen Liealgebra jede SO(3) ihr nichtabelsches Ideal besitzt. Hier wirken die Drehungen also in verschiedenen Räumen (Addition von Drehimpulsen).

[12]Wieder etwas für Freunde der Differentialgeometrie:
Die Generatoren entsprechen Tangentialvektoren am 1-Element der Gruppenmannigfaltigkeit M: Sei $g \in G$ Liegruppe. Dann ist $X_{g=1} \in T_{g=1}M$ mit $X_{g=1} = (\partial g/\partial t)_{|t=0}$, g(t) Parametrisierung der Bahn mit g(0)=1 als Tangentialvektor an die Mfk. ein Generator. Da Mfk und Tangentialraum stets die gleiche Dimension besitzen, braucht man also stets n linear unabhängige Generatoren, um eine n-Dimensionale Liegruppe zu erzeugen. Ein interessanter Aspekt ist der Kurvenverlauf außerhalb des Nullelements: Man wähle Tangentialvektor und zugehörige Kurve so aus, daß die Kurve eine Untergruppe der Liegruppe bildet. So erhält man z.B., daß die einzigen Kurven, die einparametrigen Untergruppen des $\mathbf{R}^n$ beschreiben, Geraden durch den Ursprung sind (anschulich klar).