Darstellungstheorie von Gruppen

Marko Kleine Berkenbusch
berkenb@uni-muenster.de

Im folgenden werden zunächst die wichtigsten Begriffe und Definitionen, die im Zusammenhang mit Darstellungen von Gruppen auftreten, eingeführt und erläutert. Darauf folgen einige Sätze und Theoreme, die aufbauend auf diesen grundlegenden Definitionen formuliert werden können.

Wichtige Begriffe und Definitionen

Gruppenhomomorphismus

Unter einem *Gruppenhomomorphismus* (bzw. einer *homomorphen Abbildung*) zweier Gruppen $(\mathcal{G}, \circ)$ und $(\mathcal{G}', *)$ versteht man eine Abbildung $\varphi : \mathcal{G} \to \mathcal{G}'$ derart, daß dem Produkt zweier Elemente g und h aus $\mathcal{G}$ das Produkt der entsprechenden Elemente $\varphi(g)$ und $\varphi(h)$ aus $\mathcal{G}'$ zugeordnet ist („Relationstreue“):

$$g \circ h \to \varphi(g \circ h) = \varphi(g) * \varphi(h)$$

Darstellung

Unter der *Darstellung* einer Gruppe $\mathcal{G}$ versteht man nun die homomorphe Abbildung von dieser Gruppe in eine Gruppe nichtsingulärer, linearer Operatoren auf einem Vektorraum $\mathcal{L}$. Das heißt, im Falle eines endlich-dimensionalen Vektorraums $\mathcal{L}$ bietet sich insbesondere eine Darstellung ín Form von quadratischen, invertierbaren (nichtsingulären) Matrizen an (durch die sich ja lineare Transformationen – bezüglich einer Basis – in solchen Räumen darstellen lassen).
Es gelten folgende Begriffsvereinbarungen:

- Immer möglich ist die *triviale Darstellung*: alle Elemente aus $\mathcal{G}$ werden auf 1 abgebildet
- Ist die Abbildung isomorph, so spricht man von einer *getreuen Darstellung*
- Die *Dimension der Darstellung* wird definiert als die Dimension des Vektorraumes $\mathcal{L}$
- Im Falle von Matrizen hängt deren Gestalt von der Wahl der Basis von $\mathcal{L}$ ab. Daher bezeichnet man zwei Darstellungen $D = (\varphi, \mathcal{L})$ und $D' = (\varphi', \mathcal{L}')$ als *äquivalent*, wenn eine Basiswechsel-Matrix M existiert, so daß gilt: $\forall g \in \mathcal{G} : \varphi'(g) = M^{-1}\varphi(g)M$
- Sind die linearen Operatoren φ in $\mathcal{L}$ unitär (normerhaltend), gilt also $\varphi^{-1} = (\varphi^*)^t = \varphi^+$, spricht man von einer unitären Darstellung
  Man kann zeigen, daß in jeder Folge äquivalenter Darstellungen einer endlichen Gruppe oder kompakten Lie-Gruppe mindestens eine unitäre Darstellung vorhanden ist. Daher beschränkt man sich in Anwendungen der Physik häufig auf unitäre Darstellungen.

Reduzibilität

Eine Darstellung D heißt reduzibel, wenn es eine Transformation $M \in \mathrm{GL}(\dim\mathcal{L})$ gibt, so daß:

$$\forall g \in \mathcal{G} : \varphi'(g) = M^{-1}\varphi(g)M = \begin{pmatrix} \varphi'^{(1)} & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & \varphi'^{(2)} & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \varphi'^{(3)} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

- „anschauliche Bedeutung": es gibt invariante Teilräume von $\mathcal{L}$, die unter den Gruppenoperationen auf sich selber abgebildet werden (wichtig in der Quantenmechanik: invariante Teilräume von Hilberträumen, „Multipletts").
  $\mathcal{L}$ zerfällt dann in eine Summe orthogonaler Teilräume: $\mathcal{L} = \mathcal{L}^{(1)} \oplus \mathcal{L}^{(2)} \oplus \mathcal{L}^{(3)} \oplus \dots$
- Da D' eine äquivalente Darstellung ist, gilt offensichtlich, daß jede Teilmatrix $\varphi'^{(i)}$ für sich bereits eine gültige Darstellung der Gruppe repräsentiert
- *Schreibweise:*
  $D = D^{(1)} + D^{(2)} + D^{(3)} + \dots$ (manchmal auch $\dot{+}$)
  einzelne Bestandteile können mehrfach vorkommen: $D = \sum_\mu a_\mu D^{(\mu)}$,
  $a_\mu = 0, 1, 2, \dots$ heißt die *Multiplizität* von $D^{(\mu)}$ in D
- vollständige Reduktion ist erreicht, wenn die einzelnen Teilmatrizen nicht weiter reduziert werden könnnen; die Darstellung ist dann *irreduzibel*

Reguläre Darstellung

Bei der *regulären Darstellung* handelt es sich um eine besondere Darstellung, die sich bei gegebener (endlicher) Gruppe sehr einfach konstruieren läßt:
Im folgenden bezeichnen x_μ die in beliebiger, aber fester Reihenfolge durchnummerierten Elemente der Gruppe $\mathcal{G}$, g ein beliebiges Element der Gruppe. Dann definiert man:
$D^{(reg)}_{ij}(g) = \delta(x_i^{-1} g x_j)$, $\quad$ mit $\delta(t) = \begin{cases} 1, & h = E \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$
Es gilt offensichtlich: $\dim(D^{(reg)}) = \mathrm{ord}(\mathcal{G})$.
Bei dieser Konstruktion kann man die kanonische Basis des Vektorraumes mit den Gruppenelementen (in der gegebenen Reihenfolge) interpretieren. Dann wirken die dargestellten Gruppenelemente so auf die Basisvektoren, wie es durch die Gruppenmultiplikation in $\mathcal{G}$ induziert wird; d.h., der i-te Basisvektor wird unter Anwendung von $\varphi(g)$ zu dem Basisvektor, der gx_i entspricht.

Charaktere

Der Charakter eines Gruppenelements bezüglich einer Darstellung D hat die Form:

$$\chi_D(g) = \mathrm{Tr}(\varphi(g)) = \sum_i \varphi(g)_{ii}$$

- Charaktere äquivalenter Darstellung sind gleich:
  $\mathrm{Tr}(\varphi'(g)) = \mathrm{Tr}(M^{-1}\varphi(g)M) = \mathrm{Tr}(MM^{-1}\varphi(g)) = \mathrm{Tr}(\varphi(g))$

- Elemente einer Klasse konjugierter Elemente besitzen den gleichen Charakter: $\mathrm{Tr}(\varphi(x_i^{-1} a x_i)) = \mathrm{Tr}(\varphi(x_i)^{-1} D(a) \varphi(x_i)) = \mathrm{Tr}(\varphi(a))$
- In einer reduziblen Darstellung setzen sich die Charaktere additiv aus den Charakteren der einzelnen irreduziblen Bestandteile zusammen.

Wichtige Sätze und Theoreme

Reduzibilitätskriterium

Eine Darstellung D ist genau dann irreduzibel, wenn

$$\sum_{g \in \mathcal{G}} |\chi_D(g)|^2 = \mathrm{ord}(\mathcal{G})$$

gilt.

Großes Orthogonalitätstheorem

Irreduzible Darstellungen $D^{(\alpha)} = (\varphi^{(\alpha)}, \mathcal{L})$ und $D^{(\beta)} = (\varphi^{(\beta)}, \mathcal{L}')$ erfüllen folgendes Theorem:

$$\sum_{g \in \mathcal{G}} \varphi_{ij}^{(\alpha)}(g) \varphi_{rs}^{(\beta)}(g^{-1}) = \frac{\mathrm{ord}(\mathcal{G})}{d_\alpha} \cdot \delta_{\alpha\beta} \delta_{is} \delta_{jr}$$

Dabei bezeichnen die d_α die Dimensionen der Darstellungsmatrizen $\varphi^{(\alpha)}$, und $\delta_{\alpha\beta}$ ist folgendermaßen zu verstehen:

$$\delta_{\alpha\beta} = \begin{cases} 0 & \text{wenn } D^{(\alpha)} \text{ und } D^{(\beta)} \text{ nicht äquivalent sind} \\ 1 & \text{wenn } D^{(\alpha)} \text{ und } D^{(\beta)} \text{ identisch sind} \\ \text{unbestimmt} & \text{wenn } D^{(\alpha)} \text{ und } D^{(\beta)} \text{ äquivalent aber nicht identisch sind} \end{cases}$$

Man kann dieses Theorem auch für Charaktere formulieren:

$$\sum_{g \in \mathcal{G}} \chi^\mu(g) \chi^\nu(g) = \mathrm{ord}(\mathcal{G}) \cdot \delta_{\mu\nu}$$

1. Lemma von Schur

Eine Darstellung D ist genau dann irreduzibel, wenn die einzigen Matrizen, die mit $\varphi(g)$ für alle $g \in \mathcal{G}$ kommutieren, die Skalarmatrizen (=Konstante×Einheitsmatrix) sind.

2. Lemma von Schur

Seien $D^{(\alpha)}$ und $D^{(\beta)}$ zwei irreduzible Darstellungen einer Gruppe, und sei M eine Matrix, so daß gilt:

$$\forall g \in \mathcal{G} : M \varphi^{(\alpha)}(g) = \varphi^{(\beta)}(g) M$$

Dann folgt:

1. wenn $d_\alpha \neq d_\beta$ (M nicht quadratisch): $M = 0$
2. wenn $d_\alpha = d_\beta$: entweder $M = 0$ oder M nichtsingulär, in welchem Fall $D^{(\alpha)}$ und $D^{(\beta)}$ äquivalent sind

1. Satz von Burnside

Die Zahl der irreduziblen Darstellungen n_{ID} ist gleich der Zahl der Klassen konjugierter Elemente n_{Kl}.

2. Satz von Burnside

Es gilt:

$$\sum_{\mu=1}^{n_{ID}} d_\mu^2 = \mathrm{ord}(\mathcal{G})$$

(d_μ = Dimension der μ-ten irreduziblen Darstellung)

Da abelsche Gruppen vollständig in Klassen konjugierter Elemente zerfallen (also $\mathrm{ord}(\mathcal{G}) = n_{Kl}$), kann man aus den beiden vorangegangenen Aussagen bereits folgern:
Alle irreduziblen Darstellungen abelscher Gruppen sind eindimensional, die Darstellungen abelscher Gruppen können also diagonalisiert werden.

Literatur

[1] W. Ludwig, C. Falter, *Symmetries in Physics*, 1988, Springer-Verlag

[2] J.F. Cornwell, *Group Theory in Physics Vol. 1*, 1984, Academic Press

[3] Max Wagner, *Gruppentheoretische Methoden in der Physik*, 1998, Vieweg & Sohn